MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 24.9.2014
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut ja lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Alustava pisteitys

1. a)	$(x-2)(x-3)=6 \Leftrightarrow x(x-5)=0$	1
	$\Leftrightarrow x=0 \vee x=5$	1
	TAI ratkaisukaavalla**:**	
	$x^2-5x=0$,	1
	josta $x=\dfrac{5\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{5\pm 5}{2}=\begin{cases}0\\5\end{cases}$	1
b)	Leikkauspisteet saadaan yhtälöparista $\begin{cases}y=x^2+x+1\\y=x^2+2x+3\end{cases}$ Vähentämällä yhtälöt puolittain saadaan $-x-2=0$, josta $x=-2$.	1
	Sijoittamalla tämä ylempään yhtälöön saadaan $y=3$ ja leikkauspisteeksi täten $(-2,3)$.	1
c)	Kysytty luku $=x$. Ehtona on $\dfrac{x+\frac{1}{x}}{2}=4$.	1
	Saadaan yhtälö $x^2-8x+1=0$, josta ratkaisukaavalla tulos $x=4\pm\sqrt{15}$.	1

2. a)	$\begin{cases}2x+3y=7 \mid \cdot 2\\3x-2y=4 \mid \cdot 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+6y=14\\9x-6y=12\end{cases}$ Yhteenlaskulla saadaan $13x=26 \Leftrightarrow x=2$.	1
	Sijoittamalla ylempään yhtälöön saadaan $4+3y=7 \Leftrightarrow y=1$. Leikkauspiste on siten (2,1).	1
b)	Kysytty luku on *x*. Ehtona on $x=\frac{1}{2}\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}=2x$.	1
	Neliöimällä puolittain saadaan $x=4x^2 \Leftrightarrow x(4x-1)=0$ $\Leftrightarrow x=0 \vee 4x-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{1}{4}$.	1
c)	Logaritmikaava antaa $\ln\left(\dfrac{1}{3x^2}\right)+\ln 3+2\ln x=\ln 1-(\ln 3+2\ln x)+\ln 3+2\ln x$,	1
	josta sieventämällä saadaan vastaus 0.	1

3. a)	Ehtona on $f(t) = 38 - 2e^{-0,6t} \geq 37,9$	1
	$\Leftrightarrow 2e^{-0,6t} \leq 0,1 \Leftrightarrow e^{0,6t} \geq 20$.	1
	Ottamalla luonnollinen logaritmi puolittain saadaan $0,6t \geq \ln 20 \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 20}{0,6} \approx 4,9928... \approx 5$ minuuttia.	1
b)	Muutosnopeus $f'(t) = -2e^{-0,6t} \cdot (-0,6) = 1,2e^{-0,6t}$,	2
	joten $f'(3) = 1,2e^{-1,8} = 0,1983... \approx 0,2$ astetta minuutissa.	1

4. a)	Oikea idea.	1
	Yhtälö on $y = x^2 + 2$.	1
b)	Oikea idea.	1
	Yhtälö on $y = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$.	1
c)	Yhdistetään a- ja b-kohtien ideat.	1
	Yhtälö on $y = (x-3)^2 + 2 \Leftrightarrow y = x^2 - 6x + 11$.	1

5.	Pyörähdyskappaleen kaavan sekä symmetrian nojalla tilavuus on $2\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$	1
	$= \pi \int_0^{\pi} \left(1 - \cos(2x)\right) dx$	2
	$= \pi \Big/_0^{\pi} \left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right)$	2
	$= \pi^2 \ [= 9,8696...]$	1

6.	Kaaren pisteen $\left(x, 3x-5x^2\right)$ etäisyys origosta on *d*. Tällöin $d^2 = f(x) = x^2 + \left(3x-5x^2\right)^2 = 25x^4 - 30x^3 + 10x^2,\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$.	1
	$f'(x) = 100x^3 - 90x^2 + 20x = 10x(10x^2 - 9x + 2)$.	1
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 10x^2 - 9x + 2 = 0$,	1
	josta $x = 0 \vee x = \frac{2}{5} \vee x = \frac{1}{2}$.	1
	Suurin arvo saadaan välin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa. Ääriarvoehdokkaat ovat siten $f(0) = 0,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}3125$ ja $f\left(\frac{2}{5}\right) = 0{,}32$, joista viimeisin on suurin.	1
	Pisteen $y = y\left(\frac{2}{5}\right) = 3 \cdot \frac{2}{5} - 5 \cdot \frac{4}{25} = \frac{2}{5}$. Kysytty piste on siten $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.	1

7.	Normitus: Kahvin määrä $X \sim N(\mu, 10) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{10} \sim N(0,1)$.	1
	Alipainoisen paketin todennäköisyys on $P(X < 500) = P\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu-500}{10}\right)$.	1
	Koska tämän on oltava $\le 0{,}02$, niin täytyy olla $\Phi\left(\frac{\mu-500}{10}\right) \ge 0{,}98$.	1
	Tällöin kertymäfunktiotaulukon mukaan on likimääräisesti voimassa $\frac{\mu-500}{10} \ge 2{,}05$,	1
	josta $\mu \ge 20{,}5 + 500 = 520{,}5$.	1
	Sisällön määrän odotusarvoksi on siis säädettävä 521 grammaa.	1

8. a)	Jos jono (a_n) on geometrinen, niin $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$	1
	$\Rightarrow a_n{}^2 = a_{n-1} \cdot a_n$,	1
	josta $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$.	1
b)	Jos $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, niin $b_n{}^2 = b_{n-1}b_{n+1}$.	1
	Jakamalla puolittain lausekkeella $b_n b_{n-1}$ saadaan $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$,	1
	joten jono on geometrinen.	1

9. a)	Koska $f(t)$ on parillinen funktio, niin tutkittava kaari on huipun kautta kulkevan pystysuoran akselin suhteen symmetrinen. Kaaren korkeus saadaan siis arvolla $x=0$.	1
	Korkeus $=-39f(0)+231=-39\cdot 1+231=192$ metriä.	1
b)	Kaaren leveyden puolikas on kaaren tyven positiivinen x-koordinaatti. Kaaren tyvessä $y=0$, eli $-39f\left(\frac{x}{39}\right)+231=0$ $\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{39}\right)=\frac{231}{39}=\frac{77}{13}$. Apulasku: $f(t)=a \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^t+\frac{1}{e^t}\right)=a$. Kerrotaan puolittain lausekkeella $2e^t$, jolloin saadaan yhtälö $\left(e^t\right)^2-2ae^t+1=0$. Saadaan $e^t=\dfrac{2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2}=a\pm\sqrt{a^2-1}$, joten $t=\ln\left(a\pm\sqrt{a^2-1}\right)$.	1
	Sijoitetaan arvot edeltä: $\frac{x}{39}=\ln\left(\frac{77}{13}\pm\sqrt{\left(\frac{77}{13}\right)^2-1}\right)$, josta $x\approx 39\ln\left(5{,}92\pm\sqrt{5{,}92^2-1}\right)=\begin{cases}96{,}1271...\\-96{,}1271...\end{cases}$ Koska negatiivinen arvo ei kelpaa, niin kaaren leveys on $2x=192{,}2543...\approx 192$ metriä.	1
c)	$f'(t)=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$, joten $y'(x)=-39\cdot f'\left(\frac{x}{39}\right)\cdot\frac{1}{39}=-f'\left(\frac{x}{39}\right)$ $=-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{39}}-e^{-\frac{x}{39}}\right)$.	1
	Kysytylle kulmalle α pätee yhtälö $\tan\alpha=y'(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{39}}-e^{-\frac{x}{39}}\right)$, josta arvolla $x=96{,}1271...$ saadaan $\tan\alpha=5{,}8380...$, ja edelleen $\alpha=80{,}2801...^\circ\approx 80^\circ$.	1

10. a)	Olkoon piste $C=(x,y)$ ja $E=(x,0)$. Tällöin $\Delta TOC \sim \Delta COE$, joten $\frac{t}{1}=\frac{1}{x}$, josta $x=\frac{1}{t}$.	1
	Koska $x^2+y^2=1$, niin $y=\sqrt{1-x^2}$.	1
	Pisteen C koordinaatit ovat siten $\left(\frac{1}{t},\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}\right)=\left(\frac{1}{t},\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)$.	1
b)	Pienemmän ympyrän säde $CT=\sqrt{t^2-1}$. Merkitään $DE=a$. Jana $TA=t-1$ ja $AE=1-\frac{1}{t}$. Saadaan yhtälö $TA+AE+ED=TD$, eli $t-1+1-\frac{1}{t}+a=\sqrt{t^2-1}$, josta $a=\sqrt{t^2-1}-t+\frac{1}{t}=\frac{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}}{t}$.	1
	Janan CD kulmakerroin $k_{CD}=\frac{y}{a}=\frac{\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}}{\frac{1-t^2+t\sqrt{t^2-1}}{t}}=\frac{\sqrt{t^2-1}}{t\sqrt{t^2-1}-\left(t^2-1\right)}$ $=\frac{\sqrt{t^2-1}}{t\sqrt{t^2-1}-\left(\sqrt{t^2-1}\right)^2}=\frac{1}{t-\sqrt{t^2-1}}$.	1
	Koska jana $OD=\frac{1}{t}-a=\frac{1}{t}-\sqrt{t^2-1}+t-\frac{1}{t}=t-\sqrt{t^2-1}$, niin $k_{BD}=\frac{1}{OD}=\frac{1}{t-\sqrt{t^2-1}}=k_{CD}$. Näin ollen pisteet B, D ja C ovat samalla suoralla.	1

11. a)	$f'(x) = \dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$,	1
	joka on positiivinen kaikilla $x \Rightarrow$ väitös.	1
	TAI:	
	$f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1+e^x-1}{1+e^x} = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$.	1
	Kun x kasvaa, niin $\dfrac{1}{1+e^x}$ pienenee, jolloin erotus kasvaa, eli $f(x)$ kasvaa aidosti.	1
b)	$f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \overset{(e^x}{=} \dfrac{1}{\frac{1}{e^x}+1}$	1
	$\to \dfrac{1}{0+1} = 1$, kun $x \to \infty$.	1
c)	Koska $f(10) = 0{,}99995... > 0{,}999$	1
	ja $f(x)$ on aidosti kasvava, niin epäyhtälö pätee.	1

12. a)	Tosi,	1
	koska esim. luvut $x = y$ kelpaavat.	1
b)	Epätosi,	1
	sillä ei ole olemassa suurinta reaalilukua y.	1
c)	Tosi,	1
	koska jos $x = 0$, niin kaikille luonnollisille luvuille y pätee: $0 \le y$.	1

13. a)	Yhtälön $x^5 - x = 1$ ratkaisu on sama kuin funktion $f(x) = x^5 - x - 1$ nollakohta. Koska $f'(x) = 5x^4 - 1 > 0$, kun $1 \le x \le 2$, on $f(x)$ tällä välillä aidosti kasvava.	1
	Kun lisäksi $f(1) = -1 < 0$ ja $f(2) = 29 > 0$,	1
	on jatkuvalla funktiolla $f(x)$ täsmälleen yksi nollakohta ja siten yhtälöllä täsmälleen yksi ratkaisu.	1
b)	Newtonin palautuskaava on $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^5 - x_n - 1}{5x_n^4 - 1} \left[= \dfrac{4x_n^5 + 1}{5x_n^4 - 1} \right]$.	2
	Iterointi: $x_0 = 1$ $x_1 = 1,25$ $x_2 = 1,1784...$ $x_3 = 1,1675...$ $x_4 = 1,1673... \approx 1,167$	1

***14. a)**	Piirretään janat *AD* ja *BC*. Tällöin $\angle CBA = \angle CDA$ samaa kaarta *AC* vastaavina kehäkulmina. Lisäksi kolmioilla yhteinen kulma $\angle APC$.	2
	Täten kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk).	
b)	Yhdenmuotoisuuden nojalla $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB}$,	1
	josta saadaan ristiin kertomalla $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.	1
c)	Olkoon *K* ympyrän keskipiste. Piirretään janat *AC* ja *AD* ja merkitään $\angle CDA = \alpha$. Tällöin $\angle CKA = 2\alpha$, koska se on samaa ympyrän kaarta *AC* vastaava keskuskulma. Tasakylkisen kolmion *CKA* kulmille pätee: $\angle ACK = \angle KAC = 90^\circ - \alpha$. Koska $\angle KAP = 90^\circ$, niin $\angle CAP = 90^\circ - \left(90^\circ - \alpha\right) = \alpha$.	1
	Kolmioissa *PCA* ja *DAP* on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten ne ovat yhdenmuotoiset, josta seuraa $(PA)^2 = PC \cdot PD$.	1
d)	Merkitään kolmion kärkiä *K*, *A*, *P*. Hypotenuusa leikkaa ympyrän pisteessä *E*. Jatketaan hypotenuusaa *c* säteellä $EK = a$, jolloin jatke kohtaa ympyrän pisteessä *D*.	1
	b-kohdan nojalla pätee $PA^2 = PE \cdot PD$.	1
	Merkitään $PA = b$ ja $PK = c$, jolloin $b^2 = (c-a)(c+a) = c^2 - a^2$, josta Pythagoraan lause $a^2 + b^2 = c^2$ seuraa.	1

***15. a)**	Koska binomin neliönä $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$,	1
	niin $xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ kaikille $x, y \in \mathbf{R}$.	1
b)	Edellisen kohdan nojalla $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ $\leq \frac{1}{2}\left[\left(x_1{}^2 + y_1{}^2\right) + \left(x_2{}^2 + y_2{}^2\right) + \ldots + \left(x_n{}^2 + y_n{}^2\right)\right]$	1
	$= \frac{1}{2}\left[\left(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2\right) + \left(y_1{}^2 + y_2{}^2 + \ldots + y_n{}^2\right)\right]$	1
	Sijoittamalla edelliseen lausekkeeseen $x_k = \dfrac{a_k}{A}$ ja $y_k = \dfrac{b_k}{B}$ se tulee muotoon $\frac{1}{2}\left[\dfrac{a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2}{A^2} + \dfrac{b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots + b_n{}^2}{B^2}\right] = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$	2
c)	Edellisen kohdan nojalla $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = x_1A \cdot y_1B + \ldots + x_nA \cdot y_nB =$ $AB(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)$	1
	$\leq AB \cdot 1 =$	1
	$\sqrt{a_1{}^2 + \ldots + a_n{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + \ldots + b_n{}^2}$.	1