MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ, NÄKÖVAMMAISTEN KORVAAVA KOE 24.9.2019 HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Lopullisista hyvän vastauksen piirteistä ilmenevät perusteet, joiden mukaan koesuorituksen lopullinen arvostelu on suoritettu. Tieto siitä, miten arvosteluperusteita on sovellettu kokelaan koesuoritukseen, muodostuu kokelaan koesuorituksestaan saamista pisteistä, lopullisista hyvän vastauksen piirteistä ja lautakunnan määräyksissä ja ohjeissa annetuista arvostelua koskevista määräyksistä. Lopulliset hyvän vastauksen piirteet eivät välttämättä sisällä ja kuvaa tehtävien kaikkia hyväksyttyjä vastausvaihtoehtoja tai hyväksytyn vastauksen kaikkia hyväksyttyjä yksityiskohtia. Koesuorituksessa mahdollisesti olevat arvostelumerkinnät katsotaan muistiinpanoluonteisiksi, eivätkä ne tai niiden puuttuminen näin ollen suoraan kerro arvosteluperusteiden soveltamisesta koesuoritukseen.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Painovirhe tehtävässä 1.1. korjattu 29.11.2019. Lukuarvo 490 000 on korvattu lukuarvolla 210 000. Arvostelu on tehty oikean lukuarvon perusteella.

Miten pisteytysohjeita luetaan

- Ne kohdat, joissa pitää olla tehty oikea asia oikealle objektille, on merkitty tällä värillä. Tällöin ratkaisussa pitää siis olla ekvivalenttia muotoilua vaille sama luku/lauseke/tms. Muissa kohdissa pisteet saa myös, kun tekee oikean asian oikein, mahdollisesti virheelliselle, mutta oikean tyyppiselle objektille (esim. aiempi virhe siirtyy eteenpäin).
- Merkintä $\triangledown$ rivin alussa tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit edellyttävät tätä riviä normaaliin tapaan.
- Merkintä $\odot$ rivin alussa tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit eivät edellytä tätä riviä.
- Rivin useat pisteet on erotettu /-merkillä. Epäselvissä tapauksissa on suluissa eritelty, mistä osasta saa mitäkin pisteitä.
- Erittelyä ei ole, jos rivillä on saman verran laskuja kuin pisteitä, tällöin yksi piste laskua kohden.
- Jos rivillä on yksi lasku ja siihen liittyvä sanallinen perustelu, niin puolet pisteistä (pyöristettynä ylös) saa laskusta ja loput perusteluista.
- Jos rivillä on vain yksi lasku tai kaava ja useampi piste, saa osapisteet riittävän hyvästä yrittämisestä (esim. derivaatan laskeminen osittain oikein).
- Rivillä suluissa oleva lasku tai perustelu on lisätietoa, eikä sitä vaadita pisteiden saamiseen.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen kohtaan voi soveltaa useaa vähennystä, mutta ansaittuja pisteitä ei voi menettää.

- Vastaus oikein, muttei pyydetyssä muodossa (esim. tarkkuus, yksikkö) -1 p.
- Vastaus sieventämättä loppuun asti sievennystehtävässä (esim. e^1, $\ln(e)$ tai 4^0) -2 p.
- Vastaus sieventämättä muussa tehtävässä (esim. e^1, $\ln(e)$ tai 4^0) -1 p.
- Ilmeiset näppäilyvirheet esityksessä (esim. $x = 2$, $y04$), tai näppäilyvirheet, jotka korjataan heti seuraavalla rivillä -0 p.
- Vastauksessa kopiointivirhe -1 p.
- Välipyöristyksessä ei yhtä enemmän merkitseviä numeroita kuin vastauksessa -1 p.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen kohtaan voi soveltaa useaa vähennystä, mutta kutakin korkeintaan kerran.

- Matemaattisesti puutteellinen merkintä (esim. puuttuvat sulut mutta laskettu oikein; $=$-merkin ketjutus, m^2 ilman m). Huom.! Tilanteesta riippuen epästandardi merkintä voidaan hyväksyä selitettynä. -1 p.
- Ratkaisusta puuttuu oleellisia selityksiä (lukija joutuu arvaamaan, mitä ratkaisussa esiintyvät luvut tarkoittavat) TAI perustelut ja johtopäätökset on esitetty täysin irrallisina (lukija joutuu yhdistelemään eri puolilla ratkaisua olevia lauseita) -1 p.
- Ratkaisussa merkittävästi ylimääräistä tekstiä/laskuja (lukija joutuu päättelemään, miten annetuista tiedoista muodostuu ratkaisu) -1 p.

Tehtäväkohtaiset ohjeet

A-osa

1.

210000	4
Pisteet määräytyvät vain vastauksen perusteella	
210000^2 (haamuyksikkö ilman m)	-1
Puolet tai tupla	-2
Väärä määrä nollia	-1/nolla
Yksikkö	-0
1250	4
Neliöjuuri ottamatta, eli 1 562 500	-2
336/336,0/340	4
Puolet tai tupla	3
"≈ 336"	3
Vastaus joukossa $[335, 337] \setminus \{336\}$	2
Vastaus ylittää 10 merkin maksimipituuden (sisältää laskuja/tekstiä)	-1

2.

4	3
$4+0$	2
$4+c$	1
Oikea $=$-ketju, alle 20 merkkiä	-0
Useampi lauseke	-1
$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$	3
Kertoimet (1/4 ja 1/3) oikein	$1+1$
Potenssit (4 ja 3) oikein	1
$14(2x-1)^6$	3
Kerroin 7	1
Sulkulausekkeen eksponentti 6	1
Sisäfunktion derivaatta 2	1
$-4\cos(3x)$	3
Kertoimen merkki väärin	-1
Kertoimen itseisarvo väärin	-1
$-\cos(x)$	1
Pitkä perustelu tai epäselvää, mikä on vastaus	-1

3.	Merkitään $\overline{u} = (x, y)$.	1
	Ensimmäinen ehto antaa $3x + 4y = 15$.	1
	Toinen ehto antaa $x^2 + y^2 = 25$.	1
	Ensimmäisen ehdon perusteella $x = 5 - \frac{4}{3}y$ TAI $y = \frac{15}{4} - \frac{3}{4}x$.	1
	Sijoitetaan se toiseen ehtoon: $(5 - \frac{4}{3}y)^2 + y^2 = 25$ TAI $x^2 + (\frac{15}{4} - \frac{3}{4}x)^2 = 25$.	1
	Kerrotaan auki: $25 - \frac{40}{3}y + \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 25$.	1
	Sievennetään: $-\frac{40}{3}y + \frac{25}{9}y^2 = 0$.	1
	$y = 0$ tai $y = \frac{40}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{24}{5}$.	2
	Ensimmäisestä ehdosta saamme $x = 5$ tai $x = -\frac{7}{5}$.	2
	$\overline{u} = (5{,}0)$ tai $\overline{u} = (-\frac{7}{5}, \frac{24}{5})$.	1
	Merkinnöissä skalaari ja vektori sekaisin, mutta lasku jatkuu oikein: pistemenetyksiä kolmella ensimmäisellä rivillä	
	Tehtävän voi ratkaista myös vektoreilla tai trigonometrialla.	
	Vastauksessa supistamattomia murtolukuja.	-0
	Arvaus + testaus (kutakin ratkaisua kohti)	1+1

4.	$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ ja kumpikin ääriarvo saavutetaan.	1+1
	$\triangledown$ Pienin arvo on e^{-1} ja suurin arvo on e,	1+1
	koska eksponenttifunktio on kasvava.	2
	TAI	
	derivaatta $\cos x \, e^{\sin x}$	1
	derivaatan nollakohdat $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	1
	laskettu alkuperäisen funktion arvot derivaatan nollakohdissa	1
	valittu jakso funktion jaksollisuuden perusteella ja laskettu arvot välin päätepisteissä TAI todettu funktion jaksollisuus	1
	$\triangledown$ Pienin arvo on e^{-1} ja suurin arvo on e.	1+1
	$\sin x + \cos x \geqslant 1$,	1
	koska epäyhtälö sievenee muotoon $e^{\sin x + \cos x} \geqslant e$.	1
	koska siitä voidaan ottaa puolittain logaritmi (joka on kasvava funktio)	1
	Välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ on $\sin x \geqslant \sin^2 x$ ja $\cos x \geqslant \cos^2 x$ TAI funktion $\sin x + \cos x$ minimi on derivaatan perusteella päätepisteissä ja arvo niissä on 1	2
	joten $\sin x + \cos x \geqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, eli epäyhtälö pätee.	1
	TAI	
	Ratkaistaan yhtälö $\sin x + \cos x = 1$.	1
	koska siitä voidaan ottaa puolittain logaritmi (joka on bijektio)	1
	Välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ on $\sin x + \cos x = \sqrt{1 - \cos^2 x} + \cos x = 1$, jonka ratkaisut ovat $x = 0$ ja $x = \frac{\pi}{2}$	2
	Merkkikaaviolla (tms) päätellään, että $\sin x + \cos x \geqslant 1$ eli epäyhtälö $e^{\sin x} \geqslant e^{1-\cos x}$ pätee	1
	Perusteltu epäyhtälön suunta sillä, että logaritmi on kasvava funktio.	1

B1-osa

5.

$[-3{,}1]$ ja $[4,\infty[$	3+3
Päätepisteet väärin	2+2
Yhtälön ratkaisut $x=-3$, $x=1$ ja $x=4$	1
Jokaiselle tekijälle selvitetään, millä välillä se on negatiivinen.	2
$x<a$, $x<b$ ja $x<c$	2
Jokaiselle osavälille katsotaan, kuinka moni tekijä on negatiivinen (esimerkiksi kulkukaaviolla).	1
Jos negatiivisia tekijöitä on pariton määrä, niin tulo on negatiivinen, muuten ei-negatiivinen.	1
TAI	
Tulon nollasääntö mainittu (tms) / antaa funktion nollakohdat a, b ja c	1+2
$p(x) \geqslant 0$ ratkaistaan testipisteillä TAI kulkukaaviolla TAI käyttäen 3. asteen polynomin ominaisuuksia	1
selitys, miten edellinen rivi tehdään	2
Laskettu tapaus, jossa a, b ja c konkreettisia lukuja	max 4
Käytetty konkreettisia lukuja a, b ja c esimerkkinä, mutta sanallinen selitys yleinen	max 6
Pelkkä kuva, jossa hahmotellaan kuvaajan kulku	max 4

6.

Silmämääräisesti oikea kuva tilanteesta TAI oikean suuntainen konstruktio	4
$\bigtriangledown$ paraabelien yhtälöt muodossa $y=ax^2+bx+c$ TAI $f(x)=ax^2+bx+c$ konkreettisilla luvuilla a, b ja c	1+1
yhtälö TAI yhtälöpari	2
ratkaisu	1
laskettu derivaatat ja todettu arvot samoiksi sivuamispisteessä TAI sivuaminen vastaa yhden leikkauspisteen tapausta, sillä paraabelit aukeavat eri suuntiin.	2
Todettu että sivuamispiste ei ole huippu.	1
TAI	
Voidaan esimerkiksi etsiä paraabeleja, jotka sivuavat suoraa $y=x$ origossa.	1
Paraabelin $y=ax^2+bx+c$ tangentti origossa saadaan derivaatan avulla:	2
$2ax+b=b$ kun $x=0$.	3
Saadaan siis ehto $b=1$.	2
Lisäksi paraabelin pitää kulkea origon kautta: $0=a0^2+b0+c$ eli $c=0$.	2
Esimerkeiksi käyvät siten muun muassa x^2+x ja $-x^2+x$.	2
TAI	
Tarkastellaan esimerkiksi paraabeleita $y=x^2$ ja $y=-(x-1)^2+c$.	2
Eri parametrin c arvoilla paraabeleilla on nolla, yksi tai kaksi leikkauspistettä.	2
Sivuaminen vastaa yhden leikkauspisteen tapausta, sillä paraabelit aukeavat eri suuntiin,	2
eli yhtälöllä $x^2=-(x-1)^2+c$ pitäisi olla täsmälleen yksi ratkaisu	2
eli diskriminantti $(-2)^2-4\cdot 2\cdot(1-c)=0$.	2
Siten esimerkeiksi käy $y=x^2$ ja $y=-x^2+2x-\frac{1}{2}$	2
huiput sivuavat (esim. $y=x^2$ ja $y=-x^2$)	max 2

7.	Tutkitaan ratkaisujen lukumäärää: diskriminantti, ratkaisukaava, SOLVE, kuvaaja.	2
	Ratkaisuja on 1 jos $n = 4$ (TAI 2 tapauksessa $n > 4$).	2
	Suotuisia tapauksia on kummankin nopan osalta yksi.	2
	Kaksinkertaisen nollakohdan todennäköisyys toisella nopalla on siten $\frac{1}{6}$ ja toisella nopalla $\frac{1}{8}$ (TAI $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{2}$)	2
	$\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}$ (TAI $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$)	3
	$= \frac{13}{48}$ (TAI $\frac{2}{3}$).	1
	https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/FI_2019_S/m7.ods	
	Ymmärretty ”kaksikertainen nollakohta” väärin; pisteet 2+2+0+2+3+1	max 10
	Jos toiseksi viimeisessä kohdassa vain $\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ TAI $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$; pisteet 2+2+2+2+1+0	max 9
	Ratkaisussa voi käyttää myös desimaalilukuja tai prosentteja	

8.	Luku on jaollinen yhdeksällä jos ja vain jos sen numeroiden summa on jaollinen yhdeksällä. Lukujen 111 111 111, 222 222 222 ja 333 333 333 numeroiden summat ovat 9, 18 ja 27, eli kaikki ovat jaollisia yhdeksällä. (Voi laskea myös suoraan laskimella.)	3
	Jos n on jaollinen yhdeksällä, niin myös n^k on jaollinen yhdeksällä, kun k on positiivinen kokonaisluku TAI $111\,111\,111^{111\,111\,111} = 111\,111\,111 \cdot n$, missä n on kokonaisluku	3
	Siten $111\,111\,111^{111\,111\,111}$ on jaollinen yhdeksällä, samoin muut termit	1+2
	$\triangledown$ Myös summa on siten jaollinen yhdeksällä.	3
	Pelkkä vastaus	0

9.	Kun $x < 0$, niin funktio $f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$ on kasvava, sillä $1 - x$ on vähenevä.	1
	Kun $x \geqslant 0$, niin funktio $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ on kasvava, sillä $1 + x$ on kasvava.	1
	$\odot$ Origossa funktio on jatkuva, joten se on kasvava koko reaaliakselilla.	1
	Lasketaan raja-arvot: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (oikeat arvot)	1
	Arvojoukoksi saadaan väli, jonka päätepisteet ovat -1 ja 1, (koska f on jatkuva).	1
	Väli on avoin koska f on aidosti kasvava	1
	Ensimmäiset kaksi kohtaa voi ratkaista käyttämällä derivaattaa $f'(x) = (1+\lvert x\rvert)^{-2}$ (esim. laskimesta); origotarkastelu vaaditaan erikseen	
	$x = \frac{z}{1-z}$ TAI $f^{-1}(z) = \frac{z}{1-z}$	1
	Tapauksessa $x \geqslant 0$ ratkaistaan yhtälö $z = \frac{x}{1+x}$	1
	$f^{-1}(z) = \frac{z}{1-z}$ kun $z \in [0,1[$.	1
	$x = \frac{z}{1+z}$ tai $f^{-1}(z) = \frac{z}{1+z}$	1
	Tapauksessa $x < 0$ ratkaistaan yhtälö $z = \frac{x}{1-x}$	1
	$f^{-1}(z) = \frac{z}{1+z}$ kun $z \in (-1,0]$.	1
	Tämän voi kirjoittaa lyhyemmin $f^{-1}(z) = \frac{z}{1-\lvert z\rvert}$, $z \in]-1,1[$.	
	TAI	
	Koska $B \subsetneq \mathbb{R}$, niin f ei ole bijektio. Siten käänteisfunktiota ei ole.	6
	TAI	
	Laskinratkaisu: $f^{-1}(z) = \frac{z}{1-\lvert z\rvert}$ / $z \in]-1,1[$ / selvitys, miten on saatu	2+2+2

B2-osa

10.

Vastaus: Kuusi pomppua	4
Perustelut	
Kuva, jossa $y = 1$ tai ruudukko, jossa 1 kohdalla viiva	2
Selitys, mikä on kuvan ja vastauksen yhteys	2
Ei ylityksiä kuvan ulkopuolella, koska pomput pienenevät TAI sini rajoitettu ja jakaja on suuri	2
Seitsemäs pomppu on alle yhden metrin (zoomattu kuva tai lasku)	2
TAI (Perustelut)	
Löydetty likiarvot kaikille yhtälön $h(x) = 1$ ratkaisuille (esim. SOLVE)	(2)
Löydetty 12 positiivisen ratkaisun likiarvot	2
Selitys, mikä yhteys on yhtälön ratkaisuilla ja vastauksella	2
Nämä ovat kaikki ratkaisut, sillä pomput pienenevät TAI sini rajoitettu ja jakaja on suuri	2
TAI (Perustelut)	
Laskettu derivaatta $h'(x)$	(2)
Löydetty vähintään kuudes (17,2338) ja seitsemäs (20,381) positiivinen derivaatan nollakohta	2
Laskettu funktion arvo (1,12328 ja 0,984226) em. nollakohdissa ja verrattu ykköseen	2
Nämä ovat kaikki ratkaisut, sillä pomput pienenevät TAI sini rajoitettu ja jakaja on suuri	2

11.

Pisteiden a ja b täytyy toteuttaa: Kuvaajan pisteeseen $(a,f(a))$ asetettu tangentti leikkaa x-akselin kohdassa $x = b$, ja pisteeseen $(b,f(b))$ asetettu tangentti leikkaa x-akselin kohdassa $x = a$.	3
Tangentin yhtälö on muotoa $y - f(a) = f'(a)(x - a)$	1
Leikkauskohta b saadaan sijoittamalla $y = 0$ ja $x = b$.	1
Funktion lausekkeessa esiintyy vain x^2 ja x^4, joten symmetrian perusteella $b = -a$.	2
Näiden sijoitusten jälkeen tangenttiyhtälö sievenee muotoon $7a^4 - 3a^2 - 1/5 = 0$,	2
jonka ratkaisujen likiarvot ovat $a \approx \pm 0{,}698$. (Myös tarkat arvot käyvät.)	2
Nämä ovat kysytyt luvut $a = -b$.	1

12.		
	Merkitään $f(x)=x^6$.	1
	Kun $x\in[k-1,k]$, niin $(k-1)^6\leqslant f(x)\leqslant k^6$.	2
	Integroidaan puolittain edellinen epäyhtälö ja huomioidaan, että vakion integraali yli yksikkövälin on vakio itse: $(k-1)^6\leqslant\int_{k-1}^{k}f(x)\,dx\leqslant k^6$.	3
	Otetaan summa yli vasemman epäyhtälön, kun $k=n+1,\ldots,2n$, ja oikean epäyhtälön, kun $k=n,\ldots,2n-1$: $\sum_{k=n+1}^{2n}(k-1)^6\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\int_{k-1}^{k}f(x)\,dx=\int_{n}^{2n}f(x)\,dx=[\frac{1}{7}x^7]_n^{2n}=\frac{127}{7}n^7$ ja $\sum_{k=n}^{2n-1}k^6\geqslant\sum_{k=n}^{2n-1}\int_{k-1}^{k}f(x)\,dx=\int_{n-1}^{2n-1}f(x)\,dx=[\frac{1}{7}x^7]_{n-1}^{2n-1}\geqslant\frac{127}{7}(n-1)^7$.	4
	Muuttujanvaihdolla nähdään, että $\sum_{k=n+1}^{2n}(k-1)^6=\sum_{k=n}^{2n-1}k^6$, jolloin edellisestä kohdasta saadaan halutut epäyhtälöt.	2
	TAI	
	$\sum=\frac{1}{42}n(762n^6-1323n^5+651n^4-49n^2+1)$	2
	Oikeanpuoleinen epäyhtälö voidaan kirjoittaa $\frac{127}{7}n^7-\sum=\frac{1}{42}n(1323n^5-651n^4+49n^2-1)\geqslant 0$	2
	ja se pätee, sillä $1323n^5\geqslant 651n^4$ ja $49n^2\geqslant 1$ kun $n\geqslant 1$.	2
	Vasemmanpuoleinen epäyhtälö voidaan kirjoittaa $\sum-\frac{127}{7}(n-1)^7=\frac{1}{42}(4011n^6-15351n^5+26670n^4-26719n^3+16002n^2-5333n+762)\geqslant 0$	2
	testattu arvot $n=1,2,3$	2
	päätelty arvot $n>3$	2
	TAI	
	Induktio alkuaskel $n=1$: $0^7\leqslant 1^6\leqslant\frac{127}{7}1^7$	2
	Induktio-oletus: $\frac{127}{7}(n-1)^7\leqslant\sum_{k=n}^{2n-1}k^6\leqslant\frac{127}{7}n^7$ jollakin n.	1
	Tutkitaan tapausta $n+1$: $\frac{127}{7}n^7\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n+1}k^6\leqslant\frac{127}{7}(n+1)^7$	2
	Induktio-oletuksesta saadaan $\frac{127}{7}(n-1)^7+(2n)^6+(2n+1)^6-n^6\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n+1}k^6\leqslant\frac{127}{7}n^7+(2n)^6+(2n+1)^6-n^6$.	2
	Epäyhtälö $\frac{127}{7}(n-1)^7+(2n)^6+(2n+1)^6-n^6\geqslant\frac{127}{7}n^7$ sievenee muotoon $573n^5-395n^4+795n^3-321n^2+139n-\frac{120}{7}\geqslant 0$, joka pätee, koska $n\geqslant 1$ implikoi, että $573n^5\geqslant 395n^4$, jne.	2
	Epäyhtälö $\frac{127}{7}n^7+(2n)^6+(2n+1)^6-n^6\leqslant\frac{127}{7}(n+1)^7$ sievenee muotoon $189n^5+395n^4+475n^3+321n^2+115n+\frac{120}{7}\geqslant 0$, joka on selvä	2
	Siten saadaan väite tapaukselle $n+1$	1
	Epäyhtälö ratkaistu laskimella	0
	Hyvä alku: Tarkistettu oikein laskemalla jokin konkreettinen tapaus, esim. $n=1$	2

13.

Joukko $A_6 = \{15,16,17,18,19,20\}$,	1
$\odot$ Summa: 105.	1
Joukon A_{2019} alkioiden summan voi selvittää taulukkolaskentaohjelmalla, tai alla olevalla kaavalla.	
$A_{2019} = \{2037171, \ldots, 2039189\}$	1
$\odot$ Summa: 4 115 085 420.	2
Johdetaan seuraavaksi yleinen kaava joukon A_k alkioiden summalle.	
Joukossa A_k on k alkiota, joten joukoissa	1
$A_0, \ldots, A_{k-1}$ on yhteensä $\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{1}{2}k(k-1)$ alkiota, alkaen nollasta.	2
Joukon A_k ensimmäinen alkio on siis $\frac{1}{2}k(k-1)$.	1
Siten joukon A_k viimeinen alkio on $\frac{1}{2}(k+1)k - 1$.	(1)
Joukossa A_k on k alkiota, joiden keskiarvo on $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}(k+1)k - 1) = \frac{1}{4}(k^2 - k + k^2 + k - 2) = \frac{1}{2}(k^2 - 1)$.	1
Joukon alkioiden summa on siten $\frac{1}{2}(k^2-1)k$.	1
Kaava $\frac{1}{2}(k^2-1)k$ arvattu empiiristen havaintojen pohjalta, summat 105 ja 4 115 085 420	1+1+2