Matematiikan koe, pitkä oppimäärä, näkövammaisten korvaava koe 18.3.2020

Tämä tiedosto ei välttämättä ole täysin saavutettava esimerkiksi ruudunlukuohjelman käyttäjille.

Lopulliset hyvän vastauksen piirteet 12.5.2020

Lopullisista hyvän vastauksen piirteistä ilmenevät perusteet, joiden mukaan koesuorituksen lopullinen arvostelu on suoritettu. Tieto siitä, miten arvosteluperusteita on sovellettu kokelaan koesuoritukseen, muodostuu kokelaan koesuorituksestaan saamista pisteistä, lopullisista hyvän vastauksen piirteistä ja lautakunnan määräyksissä ja ohjeissa annetuista arvostelua koskevista määräyksistä. Lopulliset hyvän vastauksen piirteet eivät välttämättä sisällä ja kuvaa tehtävien kaikkia hyväksyttyjä vastausvaihtoehtoja tai hyväksytyn vastauksen kaikkia hyväksyttyjä yksityiskohtia. Koesuorituksessa mahdollisesti olevat arvostelumerkinnät katsotaan muistiinpanoluonteisiksi, eivätkä ne tai niiden puuttuminen näin ollen suoraan kerro arvosteluperusteiden soveltamisesta koesuoritukseen.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskinta, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Miten pisteitysohjeita luetaan

- Ohjeen rakenne
  - Rivin useat pisteet on erotettu /-merkillä. Epäselvissä tapauksissa on suluissa eritelty, mistä osasta saa mitäkin pisteitä.
  - Erittelyä ei ole, jos rivillä on saman verran laskuja kuin pisteitä, tällöin yksi piste laskua kohden.
  - Jos rivillä on yksi lasku ja siihen liittyvä sanallinen perustelu, niin puolet pisteistä (pyöristettynä ylös) saa laskusta ja loput perusteluista.
  - Jos rivillä on vain yksi lasku tai kaava ja useampi piste, saa osapisteet riittävän hyvästä yrittämisestä (esim. derivaatan laskeminen osittain oikein).
  - Rivillä suluissa oleva lasku tai perustelu on lisätietoa, eikä sitä vaadita pisteiden saamiseen.
  - Suluissa olevat pisteet saa automaattisesti, jos seuraava rivi on kunnossa.
- Yleensä laskuvirhe vähentää pisteitä siitä rivistä, johon se kohdistuu mutta myöhempien rivien pisteet voi saada, jos tekee laskut/päättelyt oikein omille luvuille. Poikkeukset on merkitty **tällä värillä**. Tällöin ratkaisussa pitää siis olla ekvivalenttia muotoilua vaille oikea luku/lauseke/tms.
- Rivien riippuvuus toisistaan
  - Yleensä pisteytys on kirjoitettu ratkaisun matemaattisen etenemisen mukaisesti ja (täysiä) pisteitä annetaan vain perustelluista askeleista. Jos rivit ovat ilmeisen riippumattomia toisistaan (esim. laskettu eri funktioiden derivaatat), niin pisteet annetaan suoritusjärjestyksestä riippumatta ilman eri merkintää.
  - Jos vastaus on kirjoitettu ennen perusteluja, tarkoittaa se, että pelkästä (oikeasta) vastauksesta saa jo pisteitä.
  - Merkintä $\triangledown$ tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit edellyttävät tätä riviä normaaliin tapaan.
  - Merkintä $\odot$ tarkoittaa, että rivin pisteet voi antaa edellä olevista riveistä riippumattomasti; seuraavat rivit eivät edellytä tätä riviä.
  - Merkintä $\Rightarrow$ korostaa, että kyseiset pisteet saa vain, jos aiemmat perustelut ovat kunnossa.
- Terminologiaa
  - ”Alkupisteitä” tarkoittaa, että tästä voi antaa rivin pisteet, jos ei muualta saa pistettä. Tätä pistettä ei siis voi yhdistää muihin pisteisiin.
  - ”maxN” tarkoittaa, että tämän tyyppisestä ratkaisusta annetaan N pistettä, mikäli siinä ei ole muita virheitä.

- ”Vastaus vain likiarvona” tarkoittaa, että ratkaisussa ei ilmene lainkaan vastauksen tarkkaa arvoa.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen kohtaan voi soveltaa useaa vähennystä, mutta ansaittuja pisteitä ei voi menettää.

- Vastaus oikein, muttei pyydetyssä muodossa (esim. tarkkuus, yksikkö) -1 p.
- Vastaus sieventämättä loppuun asti sievennystehtävässä (esim. e^1, $\ln(e)$ tai 4^0)-2 p.
- Vastaus sieventämättä muussa tehtävässä (esim. e^1, $\ln(e)$ tai 4^0) -1 p.
- Ilmeiset näppäilyvirheet esityksessä (esim. $x = 2, y04$), tai näppäilyvirheet, jotka korjataan heti seuraavalla rivillä -0 p.
- Vastauksessa kopiointivirhe-1 p.
- Välipyöristyksessä ei yhtä enemmän merkitseviä numeroita kuin vastauksessa -1 p.

Seuraavat vähennykset ovat tehtäväkohtaiseen pisteohjeeseen toissijaisia. Yhteen kohtaan voi soveltaa useaa vähennystä, mutta kutakin korkeintaan kerran.

- Matemaattisesti puutteellinen merkintä (esim. puuttuvat sulut mutta laskettu oikein; =-merkin ketjutus, m^2 ilman m). Huom.! Tilanteesta riippuen epästandardi merkintä voidaan hyväksyä selitettynä. -1 p.
- Ratkaisusta puuttuu oleellisia selityksiä (lukija joutuu arvaamaan, mitä ratkaisussa esiintyvät luvut tarkoittavat) TAI perustelut ja johtopäätökset on esitetty täysin irrallisina (lukija joutuu yhdistelemään eri puolilla ratkaisua olevia lauseita) -1 p.
- Ratkaisussa merkittävästi ylimääräistä tekstiä/laskuja (lukija joutuu päättelemään, miten annetuista tiedoista muodostuu ratkaisu) -1 p.

Tehtäväkohtaiset ohjeet

A-osa

1. Yhtälöitä ja epäyhtälöitä

Tehtävä	Vastaus	Pisteet
1.1.	$x = \frac{1}{2}$	2 p.
	Jos vastaus muodossa $2/4$	1 p.
	Jos vastauksessa merkkivirhe	-1 p.
1.2.	$x < -5$	3 p.
	Vastauksessa pitää esiintyä luku 5 tai -5, muuten ei pisteitä	
	Jos luvulla 5 väärä etumerkki	-1 p.
	Jos epäyhtälö väärään suuntaan (esim. $x > -5$)	-1 p.
	Jos epäyhtälössä mukana myös yhtäsuuruus (esim. $x \leq -5$)	-1 p.
	Jos vastaus muodossa < -5 ilman muuttujaa x	-1 p.
	Jos vastaus -5 TAI $x = -5$	1 p.
	Jos vastauksessa on ylimääräisiä välejä oikean lisäksi	-2 p.
1.3.	$x = 0$ tai $x = -1$	3 p.
	Jos ratkaisu $x = 0$ puuttuu	-1 p.
	Jos ratkaisu $x = -1$ puuttuu	-2 p.
	Jos ratkaisu $x = -1$ muodossa muodossa $\sqrt[3]{-1}$	-1 p.
	Ylimääräisiä ratkaisuja	-1 p.
1.4.	$2 < x < 3$	4 p.
	Vastauksessa on luku 2 jonkin välin päätepisteenä ja väli oikeaan suuntaan	$1 + 1$ p.
	Vastauksessa on luku 3 jonkin välin päätepisteenä ja väli oikeaan suuntaan	$1 + 1$ p.
	Pelkät luvut 2 ja 3 eivät tuota pisteitä (esim. $x = 2$ ja $x = 3$)	$+0$ p.
	Jos vastaus suljettu väli $2 \leq x \leq 3$	3 p.
	Jos vastaus $-3 < x < 2$	2 p.
	Jos vastauksessa on ylimääräisiä välejä oikean lisäksi	-2 p.
Oikea vastaus väärässä laatikossa		$+0$ p.

2. Vektorilaskuja

Tehtävä	Vastaus	Pisteet
2.1.	$\overline{a} + \overline{b} = 4\overline{i} + 7\overline{j}$	2 p.
	Kerroin 4 väärin	−1 p.
	Kerroin 7 väärin	−1 p.
	Jos vääriä merkintöjä (mutta i ja j oikein)	−1 p.
2.2.	$\overline{b} - 2\overline{a} = -17\overline{i} + \overline{j}$	2 p.
	Toinen kertoimista oikein ja toinen väärin	−1 p.
	$-17\overline{i} + \overline{i}$ TAI $-17\overline{j} + \overline{j}$ ($\overline{i}$ tai $\overline{j}$ vaihtunut toiseksi)	−1 p.
	$-17\overline{j} + \overline{i}$ ($\overline{i}$ ja $\overline{j}$ vaihtaneet paikkaa)	−1 p.
	Jos vääriä merkintöjä (mutta i ja j oikein)	−1 p.
2.3.	$\lvert\overline{b}\rvert^2 = 34$	2 p.
	Jos vastauksena ≈ 34	−1 p.
	Jos vastauksena $5{,}83 \approx \lvert\overline{b}\rvert$	−1 p.
	Jos vastauksena $53 = \lvert\overline{a}\rvert^2$	−1 p.
2.4.	$\lvert\overline{a} + \overline{b}\rvert \approx 8{,}06$	2 p.
	Väärä tarkkuus 8,1 TAI 8,062	−1 p.
	Muut väärät tarkkuudet tai väärät pyöristykset	0 p.
	Vastaus −8,06 TAI ±8,06	−1 p.
2.5.	$\overline{a} \cdot \overline{b} = -11$	2 p.
	Etumerkki väärin	−1 p.
	Vastaus sisältää vektoreita	0 p.
2.6.	$\alpha \approx 105^\circ$	2 p.
	Väärä mutta järkevä tarkkuus ja oikein pyöristetty	−1 p.
	Vastaus 2 TAI 1,8 TAI 1,83 (laskin ollut radiaanimoodissa)	+1 p.
	Vastaus 75 (pistetulon miinus unohtunut)	+1 p.
Oikea vastaus väärässä laatikossa		+0 p.

3. Pinta-alan ääriarvo

Tehtävä	Vastaus	Pisteet
3.1.	$\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} /_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ("sisäfunktio" $\pm\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ + loppu)	1 + 1 p.
	Laskettu sijoitus oikein loppuun (omalla funktiolla).	1 p.
	Vastaus vain likiarvona ($\frac{4}{\pi} = 1{,}2732\ldots$)	−1 p.
3.2.	⨀ Vastaus $t = \frac{3}{4}$.	2 p.
	Pinta-ala saadaan integroimalla sin-funktiota välillä $[t,\ t + 1/2]$.	1 p.
	$f(t) = \int_t^{t+1/2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.	(2 p.)
	Tämän maksimoimiseksi lasketaan derivaatta: $f'(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.	1 p.
	$f'(t) = 0$, jos $\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)$ ja $\frac{\pi}{2}t$ ovat toistensa supplementtikulmia (välillä $[0, \pi]$)	(1 p.)
	eli $\pi - \frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}t$.	1 p.
	Merkkikaavion TAI reuna-arvojen TAI hahmotelman perusteella derivaatan nollakohta on maksimikohta.	1 p.
	(Suurin pinta-ala saavutetaan siis, kun $t = \frac{3}{4}$.)	
	Kerroin $\frac{2}{\pi}$ puuttuu integraalista	−1 p.
	Kerroin $\frac{\pi}{2}$ puuttuu derivaatasta	−1 p.
	Integraalissa ja/tai derivaatassa merkki väärin	−1 p.
	Integraalissa muita virheitä, mutta tämä derivoitu oikein	+1 p.
	Alkupiste: derivoitu (mahdollisesti väärin) jotakin funktiota	max1 p.
Tai		
	⨀ Vastaus $t = \frac{3}{4}$.	2 p.
	Hahmotelma kuvaajasta, jolla on yksi maksimikohta, ja pystysuorista leikkaavista suorista TAI vastaava sanallinen selitys.	1 p.
	Pinta-ala on suurimmillaan, kun kaistale on valittu (symmetrisesti) huipun ympäriltä.	2 p.
	Funktion $\sin z$ suurin arvo on kohdassa $z = \frac{\pi}{2}$,	(1 p.)
	joten funktion $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ suurin arvo on kohdassa $x = 1$.	2 p.
	Välin pituus on $\frac{1}{2}$, joten pinta-alan suurin arvo saavutetaan, kun $t = 1 - \frac{1}{2}/2$.	1 p.

4. Suurin etäisyys

Tehtävä	Vastaus	Pisteet
	Pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+y^2}$ TAI lauseke x^2+y^2 TAI laskettu jonkin pisteen etäisyys origosta.	1 p.
	∇ (Tarkasteltu reunaa) $x^4+y^2=1$.	(2 p.)
	Tällöin $y^2=1-x^4$, joten maksimoidaan etäisyyden neliö x^2+1-x^4	1 p.
	$\odot$ välillä $-1\le x\le 1$.	1 p.
	Lausekkeen derivaatta on $2x-4x^3$ TAI idea derivoinnista.	1 p.
	Derivaatan nollakohdat $x=0$ / $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.	1+1 p.
	Kulkukaavio tai tapaustarkastelu (jos rajoitus $-1\le x\le 1$ puuttuu, tästä max 1)	2 p.
	$\Rightarrow$ suurin etäisyys on $\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.	2 p.
	Myös väli $-1<x<1$ käy	
Tai		
	Etäisyys on suurin, kun käyrän $x^4+y^2=1$ normaali kulkee origon kautta.	1 p.
	Funktion $f(x)=\sqrt{1-x^4}$	1 p.
	derivaatta on $f'(x)=-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$, joka on tangentin kulmakerroin.	2 p.
	Kohta $x=0$ on yksi ratkaisu, jolloin etäisyys on 1.	1 p.
	Maksimikohdassa normaalin kulmakerroin on $\frac{\sqrt{1-x^4}}{x}$,	2 p.
	joten saadaan yhtälö $-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^4}}{x}=-1$.	2 p.
	Tällöin $2x^2=1$, joten $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.	1 p.
	$\Rightarrow$ suurin etäisyys on $\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.	2 p.
Rivistä 4 alkaen voidaan laskea y:n avulla		
Vastaus vain likiarvona.		-2 p.
Vastaus $\approx 1{,}12$ TAI $\approx 1{,}1$ kokeilemalla.		2 p.
Huom.! ratkaisussa voi käyttää myös muuttujanvaihtoa ($u=x^2$ ja $v=y^2$).		

B1-osa

5. Puoliympyröitä

Tehtävä	Vastaus	Pisteet
	Aluetta rajaavien puoliympyröiden säteet ovat 1, 3 ja 4.	3 p.
	Niitä vastaavien kokonaisten puoliympyröiden alat ovat $\pi/2$, $9\pi/2$ ja 8π.	3 p.
	Alueen pinta-ala on $\pi/2 + (8\pi - 9\pi/2)$	4 p.
	$= 4\pi$.	2 p.

6. Paraabeli ja piste

Tehtävä	Vastaus	Pisteet
6.1.	Paraabelin pisteen $(x_0,\ x_0^2)$ kautta kulkevan tangentin kulmakerroin on $2x_0$	1 p.
	ja yhtälö siis $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$, eli $y = 2x_0x - x_0^2$.	1 p.
	Sijoitetaan piste, saadaan $-1 = 2x_0 - x_0^2$	1 p.
	$\Rightarrow (1-\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2})$ ja $(1+\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2})$ TAI $(-0{,}41; 0{,}17)$ ja $(2{,}41; 5{,}83)$.	1 p.
Tai		
	Muodostetaan yhtälöryhmä: $y + 1 = k(x - 1)$, $y = x^2$, $k = 2x$	1+1+1 p.
	Josta ratkaistaan $x = 1 \pm \sqrt{2}$	
	$\Rightarrow (1-\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2})$ ja $(1+\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2})$ TAI $(-0{,}41; 0{,}17)$ ja $(2{,}41; 5{,}83)$.	1 p.
	Lähtee liikkeelle suoraan yhtälöstä $x^2 + 1 = 2x(x - 1)$	max2 p.
Tai (Geogebra tms. ratkaisu)		
	yksi komento: tangentit käyrälle pisteen A kautta	1 p.
	kaksi komentoa: tangentien ja käyrän leikkauspisteet	1+1 p.
	selitykset mitä on tehty	1 p.
6.2.	Etäisyyden lauseke on $\sqrt{(x-1)^2 + (x^2+1)^2}$	2 p.
	(Minimoidaan siis $(x-1)^2 + (x^2+1)^2 = x^4 + 3x^2 - 2x + 2$)	
	Laskettu derivaatta $\frac{2x^3+3x-1}{\sqrt{x^4+3x^2-2x+2}}$ (TAI $4x^3 + 6x - 2$)	2 p.
	kulkukaavio TAI muu perustelu	1 p.
	tärkeä nollakohta: $$\mathrm{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)} - 1/\sqrt[3]{2\left(1+\sqrt{3}\right)} \approx 0{,}31291$$	1 p.
	$\Rightarrow (0{,}31; 0{,}10)$ on lähin piste TAI tarkka arvo	1 p.

	⇒ Lyhin etäisyys on noin 1,30 TAI tarkka arvo	1 p.
Tai (Geogebra tms. ratkaisu)		
	komento: otetaan piste B käyrältä ja piirretään siihen tangentti	1 p.
	komento: piirretään suora pisteiden A ja B kautta	1 p.
	komento: tangentin ja suoran välinen kulma	1 p.
	Siirretään pistettä B, kunnes tulee noin suorakulma	1 p.
	komento: etäisyys	
	⇒ vastaus: piste (0,31; 0,10) ja etäisyys 1,30	1+1 p.
	Perustelu: lyhin etäisyys kun tangentti ja suora ovat kohtisuorassa	2 p.
Tai (Geogebra tms. ratkaisu)		
	Piirretty ratkaisu	2 p.
	Selitetty mitä piirretty/tehty	2 p.
	⇒ vastaus: piste (0,31; 0,10) ja etäisyys 1,30	1+1 p.
	Matemaattinen perustelu	2 p.
Likiarvovastauksilta vaaditaan 2 desimaalin tarkkuus, muuten −1 p. koko tehtävässä		
Voi ratkaista myös suoraan käskyllä. Pisteet: käsky (3 p.) + vastaus (1 p.) 6.1.-kohdassa ja käsky (4 p.) + vastaus (2 p.) 6.2.-kohdassa.		

7. Yatzy

Tehtävä	Vastaus	Pisteet
7.1.	⊙ Kaikkien kombinaatioiden määrä on 6^5 TAI todennäköisyys saada kolme kuutosta $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$ ja todennäköisyys saada kaksi viitosta $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$.	1 p.
	⊙ Kolme kuutosta ja kaksi viitosta voidaan saada $\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla.	1 p.
	Kerrottu/jaettu omat luvut ($\frac{10}{6^5} \approx 0{,}0013$).	1 p.
	Ensimmäiset kaksi pistettä voi saada myös kohdasta 7.2., jos vastaavat laskut on tehnyt siellä, mutta 7.1. on tyhjä.	
7.2.	⊙ Kolmikolle on 6 erilaista vaihtoehtoa TAI todennäköisyys saada kolme samaa $\frac{6}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$	1 p.
	⊙ Parille on 5 erilaista vaihtoehtoa TAI todennäköisyys saada kaksi (muuta) samaa $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	1 p.
	⊙ $\binom{5}{3}\cdot 30\cdot\frac{1}{6^5}$ (kerroin, 30, lkm: kukin 1)	3 p.
	$=\frac{50}{6^4}$ TAI 0,039.	1 p.

7.3.	⊙ Nelikko voi sijoittua $\binom{5}{4} = 5$ eri tavalla.	1 p.
	⊙ Vaihtoehtoja nelikolle on 6 ja yksittäiselle 5 TAI todennäköisyys saada neljä samaa $\frac{6}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$ ja todennäköisyys saada yksi muu on $\frac{5}{6}$.	1 p.
	⊙ Kerrottu/jaettu omat luvut, jaettu 6^5 ($\frac{5\cdot 30}{6^5} = \frac{5^2}{6^4} \approx 0{,}019$)	1 p.
Vastauksen saa antaa kaikissa muodoissa (murtoluku, %, likiarvo)		
Kaikki tarkkuudet hyväksytään.		
Pelkät laskut ilman mitään selityksiä		2+5+2 p.

8. Polynomien jakoalgoritmi

Tehtävä	**Vastaus**	**Pisteet**
	Jakoalgoritmin sanallinen kuvaus (selitysosuus):	
	selitys: polynomista $p(x)$ vähennetään/erotetaan $x^4q(x)$	2 p.
	selitys: tuloksena viidennen asteen polynomi, jonka johtava termi on $3x^5$	2 p.
	selitys: $3x^3q(x)$ vähennetään/erotetaan, jäljelle jää neljännen asteen polynomi.	1+1 p.
	Suoritettu algoritmi loppuun (suoritusosuus):	
	$p(x) = (x^4 + 3x^3 + 4x^2)q(x) + 11x^3 + 3x^2 - 3x + 4$	2 p.
	$p(x) = (x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 11x + 36)q(x) + 94x - 32$	
	kertoimista 11, 36, 94, -32 kustakin 1 p.	4 p.
Selitetty vain yleinen polynomien jakoalgoritmi, selitysosuudesta		1 p.
Jos suoritusosuudessa kertoimet ovat väärin alun laskuvirheen takia, voi kuitenkin antaa osan pisteistä, mikäli periaate on oikea.		
Algoritmi loppuun laskimella (pelkkä tulos)		+0 p.
Algoritmi loppuun jakokulmalla, suoritusosuudesta		max 6 p.

9. Käänteisfunktion derivaatta

Tehtävä	**Vastaus**	**Pisteet**
	Esimerkki funktiosta f tai lausekkeesta	2 p.
	Perustelu käänteisfunktion olemassaololle	(2 p.)
	Laskettu käänteisfunktion lauseke	(3 p.)
	Tähän asti voi päästä väärällä funktiolla. Loput pisteet vain toimivalla funktiolla.	
	Laskettu käänteisfunktion derivaatta	3 p.

	Laskettu, että käänteisfunktion derivaatan arvo pisteessä $x = 2$ on $\frac{1}{2}$	2 p.
Tai		
	Funktio h arvo pisteeesä $x = 2$ on $\frac{1}{2}$	2 p.
	Integrointi $H = \int h$	3 p.
	Perustelu funktion H käänteisfunktion olemassaololle	(2) p.
	Käänteisfunktion H^{-1} lauseke	3 p.
	Vastauksena funktio H^{-1} tai sen lauseke	2 p.
	Vastauksessa integrointivakio C	-1 p.
Jos funktio ei ole bijektio ”luonnolliselta määrittelyjoukoltaan” (esim. x^2), pitää funktio rajoittaa sopivaan joukkoon, muuten		-1 p.
Käänteisfunktio $\pm\sqrt{x}$ (huono merkintä).		-1 p.
Esimerkkejä mm. $x \mapsto 2x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sqrt{8x}$ ja $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ kun $x \geq 0$.		

B2-osa

10. Suuren luvun logaritmi

Tehtävä	**Vastaus**	**Pisteet**
10.1.	Hyvä alku, esim. luvun jakaminen 1-, 2- ja 3-numeroisiin palasiin TAI havainto, että pitäisi selvittää numeroiden lukumäärää	(1 p.)
	Numeroiden lukumäärä järkevästi laskettu.	1 p.
	k on yksi pienempi kuin edellisen luvun lukumäärä.	1 p.
	Esimerkkejä numeroiden lukumäärän laskemisesta: $9 + 2 \cdot 9 \cdot 10 + 3 \cdot 9 \cdot 100 = 9 + 180 + 2700 = 2889$ (oikein); $9 + 2 \cdot 89 + 3 \cdot 899 = 2884$ (väärin, mutta järkevä); $9 + 90 + 900 = 999$ (väärin, ei järkevä)	
	Tästä kohdasta voi saada 3 p. vaikka lukumäärissä olisi indeksointivirheitä, kunhan logiikka on järkevä ja selitetty.	
10.2.	Hyvä alku, esim. sijoitettu oma k lausekkeeseen $\ln(1{,}23 \cdot 10^k)$ tai $\ln(1{,}23 \cdot 10^k) = \ln(1{,}23) + \ln(10^k)$.	(1 p.)
	Laskettu $\ln(1{,}23 \cdot 10^k)$ omalle k:lle, $k \geq 1000$	2 p.
	⊙ Katkaistu kokonaislukuosa	2 p.
	Kaikki luvut oikein ja vastaus 6 650	1 p.
	Laskettu $\ln(1{,}24 \cdot 10^{2888})$ tai $\ln(1{,}2345 \cdot 10^{2888})$, tai muulla tavalla osoittanut, että a:n pyöristys ei vaikuta aiemmin laskettuun kokonaisosaan.	3 p.
	Viimeisen rivin pisteet saa, jos laskee $\ln(1{,}2345 \cdot 10^k)$ tai tarkemmalla heti alusta.	

	$\ln(1{,}23 \cdot 10^{2888}) = \infty$	0 p.
	Katkaisun sijaan pyöristys/≈-merkki	−1 p.
Pelkkä vastaus		0 p.

11. Lukujono

Tehtävä	Vastaus	Pisteet
11.1.	(Alkuaskel) $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$.	1 p.
	(Induktio-oletus) $a_n > a_{n-1}$ jollakin $n \geq 2$.	1 p.
	(Induktioväite) Pyritään osoittamaan, että $a_{n+1} > a_n$ seuraa induktio-oletuksesta.	1 p.
	Induktioväite perusteltu ja koko todistuksen looginen rakenne (ml. implikaatioiden suunnat) kunnossa.	1 p.
	”Osoitettu” induktioaskel sijoituksella $a_n < \sqrt{2+a_n}$	+0 p.
	$>$ sijaan voi olla (johdonmukaisesti) $\geq$	
11.2.	(Alkuaskel) $a_1 = \sqrt{2} < 2$.	1 p.
	(Induktio-oletus) $a_n < 2$ jollakin $n \geq 1$.	1 p.
	(Induktioväite) Pyritään osoittamaan, että $a_{n+1} < 2$ seuraa induktio-oletuksesta.	1 p.
	Induktioväite perusteltu ja koko todistuksen looginen rakenne (ml. implikaatioiden suunnat) kunnossa.	1 p.
11.3.	⊙ Oikea vastaus 2 (tämä piste ei vaadi perusteluja)	1 p.
	⊙ Yhteys $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}} = \lim_{n\to\infty} a_n$	1 p.
	(Kasvava ja ylhäältä rajoitettu) jono (a_n) suppenee kohti jotakin raja-arvoa $a > 0$ ja myös $a_{n+1} \to a$, kun $n \to \infty$.	(1) p.
	(Neliöjuurifunktion jatkuvuuden perusteella) saadaan yhtälö $a = \sqrt{2+a}$, jonka ainoa positiivinen ratkaisu $a = 2$ on kysytty raja-arvo.	1 p.
	Ensimmäisen pisteen voi saada esim. taulukoimalla	
Sanat ”alkuaskel”, ”induktio-oletus”, ”induktioväite” eivät tuota itsenäisesti pisteitä, eikä niitä vaadita, jos todistuksen rakenne muuten selviää.		
Huom.! Pätevän induktiotodistuksen voi rakentaa lähtemällä väitteestä ja muokkaamalla sitä kohti oletusta, jos implikaatiot menevät oikein.		
Vaiheita kirjoitettu allekkain ilman, että ilmenee mihin suuntaan implikaatiot menevät (huono merkintä).		−1 p.
Alkupisteet: Taulukointi tai $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$		max 1 p.

12. Geometrisen keskiarvon todennälöisyyksiä

Tehtävä	Vastaus	Pisteet
12.1.	Annettu esimerkki kahdesta kokonaisluvusta välillä 2–100.	1 p.
	⊙ Kahden annetun erisuuren kokonaisluvun geometrinen keskiarvo on kokonaisluku,	1 p.
	joka on osoitettu laskemalla (laskimella).	1 p.
12.2.	Alkeistapaukset 100^2	(1 p.)
	Laadittu taulukko, jossa on kaikista 10000 tulosta neliöjuuri.	1 p.
	Selitetty, millä käskyillä taulukossa on eroteltu kokonaisluvut muista (esim. leikkaamalla desimaaliosaa, joka on välillä $[0,1[$).	2 p.
	Selitetty, millä käskyillä on laskettu luvut, joissa geometrinen keskiarvo on kokonaisluku (esim. kokonaislukuarvojen kohdalla 1, muualla 0).	2 p.
	Tulos on 310.	2 p.
	Todennäköisyys on siis $310/10^4 = 0{,}031$.	1 p.
	Pienempi taulukko (esim. 10×10)	max 2 p.
	Pelkkä luettelo joistain toimivista pareista	0 p.
Tai (brute force -ratkaisu)		
	Alkeistapaukset 100^2	(1) p.
	Laadittu taulukko, jossa on kaikista 10000 tulosta neliöjuuri.	1 p.
	Ratkaisusta ilmenee, että kokonaisluvut on laskettu käsin.	
	Tulos on 310 TAI 309 / 311 (4p) TAI muu kokonaisluku välillä [300, 320] (2 p.).	6 p.
	Todennäköisyys on siis $310/10^4 = 0{,}031$.	1 p.
Tai (analyyttinen ratkaisu)		
	Alkeistapaukset 100^2	1 p.
	Neliöt välillä 1–100: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100	1 p.
	Neliöjuuri on kokonaisluku, jos molemmat luvut neliöitä, josta saadaan $10 \cdot 10 = 100$ alkeistapausta.	1 p.
	Neliöjuuri on kokonaisluku, jos luvut ovat samat josta saadaan $100 \cdot 1 = 100$ alkeistapausta	1 p.
	edellisissä alkeistapauksissa 10 on samoja.	(1 p.)
	Muut tapaukset huomioiden alkeistapauksia yhteensä 310.	3 p.
	Todennäköisyys on siis $310/10^4 = 0{,}031$.	1 p.
Tai (simulaatioratkaisu)		
	Arvottu kokonaislukupareja, missä luvut välillä 1–100 sekä laskettu niiden geometriset keskiarvot.	2 p.
	⊙ Lukupareja on vähintään 10	1 p.

	⊙ Lukupareja on vähintään 100	1 p.
	⊙ Lukupareja on vähintään 250	1 p.
	⊙ Lukujen arpomistapa on selitetty.	1 p.
	Jaettu saatu tulos arvottujen parien kokonaismäärällä.	2 p.
	Tulos on välillä [0,016; 0,046] TAI lukupareja on vähintään 500.	1 p.
https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/FI_2020_K/m12a.ods https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/FI_2020_K/m12b.ods		

13. Trigonometrisiä epäyhtälöitä

Tehtävä	Vastaus	Pisteet
	Lasketaan ensin $g'(x) = -n\sin x$.	2 p.
	Pitää siis osoittaa $-n\sin x_0 < -n + 1$	1 p.
	eli $\sin x_0 > 1 - \frac{1}{n}$.	1 p.
	▽ Jos $\sin\frac{x_0}{n} = n\cos x_0$, niin $\sin x_0 = \sqrt{1 - \cos^2 x_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin^2\frac{x_0}{n}}$	1 p.
	$> \sqrt{1 - (\frac{1}{n})^2}$	2 p.
	Riittää siis osoittaa, että $\sqrt{1 - (\frac{1}{n})^2} \geq 1 - \frac{1}{n}$,	1 p.
	eli $1 - (\frac{1}{n})^2 \geq (1 - \frac{1}{n})^2$	2 p.
	joka pätee, koska $\frac{2}{n} \geq \frac{2}{n^2}$ kun $n \geq 1$.	2 p.
Alkupisteitä: derivaatta asteissa ($g'(x_0) = -n\frac{\pi}{180}\sin x_0$) TAI tapaus $n = 1$ TAI graafinen esitys		max 1 p.