YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

Matematiikka, pitkä oppimäärä 22.9.2020
Alustavat hyvän vastauksen piirteet 22.9.2020

Alustavat hyvän vastauksen piirteet on suuntaa-antava kuvaus kokeen tehtäviin odotetuista vastauksista ja tarkoitettu ensisijaisesti tueksi alustavaa arvostelua varten. Alustavat hyvän vastauksen piirteet eivät välttämättä sisällä ja kuvaa tehtävien kaikkia hyväksyttyjä vastauksia. Alustavat hyvän vastauksen piirteet eivät ole osa Ylioppilastutkintolautakunnan yleisissä määräyksissä ja ohjeissa tarkoitettua tietoa siitä, miten arvosteluperusteita on sovellettu yksittäisen kokelaan koesuoritukseen. Alustavat hyvän vastauksen piirteet eivät sido Ylioppilastutkintolautakuntaa lopullisen arvostelun perusteiden laadinnassa.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Arvostelussa otetaan huomioon, että teknisen virheen takia tehtävässä 9 ei ollut käytössä kaavaeditoria tai kuvakaappauksia.

A-osa

1.

1. $x = -\frac{1}{2}$	3
2. $a = 9$	3
3. Ei ratkaisuja.	3
4. $b = 11$	3

2.

Tämä tehtävä arvostellaan lautakunnassa keskitetysti, eikä opettajan tarvitse tehdä alustavaa arvostelua. Keskitetysti arvosteltavan vastauksen pisteet päivittyvät arvostelupalveluun lopullisen arvostelun edetessä.	
1. $-8x^4$	2
2. 10	2
3. $3x^2 - 4x$	2
4. 135°	2
5. 4	2
6. 82 mm	2

3.

1. Eksponenttifunktiota käyttämällä $\frac{y}{1-y} = e^{a+bx}$	2
$\Rightarrow y = \frac{e^{a+bx}}{1+e^{a+bx}}$	4
2. Kun $y = 0{,}5$, pätee $\ln \frac{0{,}5}{1-0{,}5} = 2 - x$	3
$\Rightarrow 2 - x$=0 ja $x = 2$.	3

4.

Käyrän tangentin kulmakerroin pisteessä (x_0, y_0) on $3x_0^2 - 10x_0 + 2$,	1
joten pisteeseen (x_0,y_0) piirretyn tangentin yhtälö on $(3x_0^2 - 10x_0 + 2)(x - x_0) = y - y_0$,	1
eli $(3x_0^2 - 10x_0 + 2)(x - x_0) = y - (x_0^3 - 5x_0^2 + 2x_0 + 8)$.	1
Suoran on kuljettava pisteen (2,0) kautta, eli yhtälön $(3x_0^2 - 10x_0 + 2)(2 - x_0) = -(x_0^3 - 5x_0^2 + 2x_0 + 8) = -(x_0 - 4)(x_0 - 2)(x_0 + 1)$ on oltava tosi.	2
Yhtälö on tosi, jos $x_0 = 2$, jolloin $y_0 = 0$,	2
eli suoran yhtälö on $y = (3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 2)(x - 2) = -6(x - 2) = -6x + 12$	1
tai kun $(3x_0^2 - 10x_0 + 2) = (x_0 - 4)(x_0 + 1)$,	1
josta toisen asteen ratkaisukaavalla $x_0 = 2$ tai $x_0 = \frac{3}{2}$,	1
eli kulmakerroin on $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{25}{4}$,	1
ja tangentin yhtälö on $y - \frac{25}{8} = -\frac{25}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)$ eli $y = -\frac{25}{4}x + \frac{25}{2}$.	1

B1-osa

5.	Kolmioiden yhteinen alue on viisikulmio, joka jakaantuu kahteen symmetriseen puolisuunnikkaaseen.	1
	Puolisuunnikkaan leveys on $1/2$.	1
	Yhdenmuotoisten kolmioiden perusteella pidemmän pystysuoran sivun pituus h toteuttaa yhtälön $h/(7/2) = 3/4$,	2
	joten $h = 21/8$.	1
	Vastaavasti lyhyemmän pystysuoran sivun pituus y toteuttaa yhtälön $y/3 = (21/8)/(7/2)$,	2
	joten $y = 9/4$.	1
	Puolisuunnikkaan ala on $\frac{1}{2}(h+y) \cdot \frac{1}{2} = 39/32$,	2
	joten kysytty ala on $2 \cdot 39/32 = 39/16$.	2

6.	Ensimmäisen putken päätepiste $A = (9/5{,}12/5, -2)$.	2
	Runkoputken yleinen piste on muotoa $(4-2t{,}4+3t, -3)$.	2
	Muodostettu kohtisuoruusehto (etäisyys lyhin) pistetulon avulla.	2
	Liitoskohdassa $t = -2/65$.	2
	Liitoskohdan B koordinaatit ovat $(264/65{,}254/65, -3)$,	2
	joten pisteiden A ja B välinen etäisyys on $2{,}8961 \approx 2{,}9$ metriä.	2

7.	1. $P(2) = 0{,}82^2 = 0{,}6724 \approx 0{,}67$	3
	2. $P(2) = p \cdot p = p^2$.	1
	Todennäköisyys yksittäisen heiton epäonnistumiselle on $1-p$.	1
	Todennäköisyys tapahtumalle "1. koriin, 2. ei" on $p(1-p)$	1
	ja tapahtumalle "1. ei koriin, 2. koriin" $(1-p)p$.	1
	Näin ollen $P(1) = p(1-p) + (1-p)p = 2p - 2p^2$.	1
	$P(0) = (1-p)^2$.	1
	3. Ehdosta $P(1) = P(2)$ saadaan yhtälö $2p - 2p^2 = p^2$ eli $3p^2 - 2p = 0$,	1
	jonka ratkaisut ovat $p = 0$ tai $p = 2/3$.	2

8.	1. $A_2 = \int_1^\infty (x^{-2} - x^{-3})\,dx$	2
	$= \frac{1}{2}$	2
	2. $A_n = \int_1^\infty \left(x^{-n} - x^{-(n+1)}\right) dx$	3
	$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$	3
	$= \frac{1}{n^2-n}$.	2

9.

Valitaan ensimmäiseksi luvuksi $1000001! + 2$.	1
Luku $n = 1000001!$ on jaollinen luvulla 2,	1
joten ensimmäinen luku $n+2$ on jaollinen luvulla 2,	1
eikä siis ole alkuluku.	1
Samoin arvoilla $3 \leqslant k \leqslant 1000001$ luku n sisältää tekijän k	2
ja on siis jaollinen luvulla k.	1
Tällöin $n+k$ on myös jaollinen luvulla k.	2
Arvoilla $2 \leqslant k \leqslant 1000001$ saadaan siis peräkkäiset yhdistetyt luvut $n+k$,	2
joita on yhteensä miljoona kappaletta.	1

B2-osa

10.

Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a.	3
Yleisesti eivät päde seuraavat väitteet: Jos funktio f on jatkuva kohdassa a, niin se on derivoituva kohdassa a. Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a. Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a. Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, niin se on derivoituva kohdassa a.	1/kohta, yht. 7
Jatkuvuus $\Rightarrow$ derivoituvuus tai jatkuvuus $\Leftrightarrow$ derivoituvuus:	
Esimerkiksi käy $f(x) = \sqrt{\lvert x \rvert}$, kun $a = 0$.	1
Raja-arvo $\Rightarrow$ jatkuvuus tai derivoituvuus:	
Esimerkiksi käy $f(x) = x$, kun $x \neq 1$, $f(1) = -1$, tarkasteltaessa pistettä $a = 1$.	1

11.

$\sin x = -\cos x$, kun $x = \frac{3}{4}\pi$	2
$(\sin x)^2 + \sin x \cos x + (\cos x)^2 = 1 + \sin x \cos x = 0$	2
kun $\sin x \cos x = -1$	1
Tämä on mahdotonta, sillä $-1 \leqslant \sin x, \cos x \leqslant 1$ ja $\sin x$ ja $\cos x$ eivät koskaan ole yhtä aikaa ± 1.	1
Kerrotaan yhtälö puolittain termillä $\sin x - \cos x$, jolloin saadaan $\sin^{n+1} x - \cos^{n+1} x = 0$,	1
eli $\sin^{n+1} x = \cos^{n+1} x$.	1
Jos $n+1$ on pariton, on oltava $\sin x = \cos x$.	1
Alkuperäisen yhtälön vasemman puolen lauseke on silloin positiivinen. Ei ratkaisuja.	1
Jos $n+1$ on parillinen, on oltava $\sin x = \pm \cos x$.	1
Ratkaisu saadaan vain tapauksessa $\sin x = -\cos x$, eli $x = \frac{3}{4}\pi$.	1

12.	Pisteeseen (t,t^2) piirretyn tangentin kulmakerroin on $2t$,	1
	joten normaalin kulmakerroin on $\frac{-1}{2t}$,	1
	ja normaalin yhtälö on $y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x-t)$, eli $y = t^2 - \frac{x}{2t} + \frac{1}{2}$.	1
	Normaali leikkaa y-akselin, kun $y - t^2 = \frac{1}{2t} \cdot t$, eli $k(t) = t^2 + \frac{1}{2}$	1
	$\lim_{t\to 0} k(t) = \lim_{t \to 0} t^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	1
	Silloin $T(t) \to \left(0,\frac{1}{2}\right)$, eli kaarevuussäde on $\frac{1}{2}$.	1
	Pisteeseen (1,1) piirretyn normaalin yhtälö on $y-1 = -\frac{1}{2}(x-1)$, eli $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.	1
	Ympyrän keskipisteen on siis sijaittava tällä suoralla.	1
	Pisteeseen $T(t)$ piirretty normaali leikkaa mainitun suoran, kun $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = t^2 - \frac{x}{2t} + \frac{1}{2}$,	1
	eli $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2t}\right) x = t^2 - 1$, josta $x = \frac{t^2-1}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2t}} = -2t(t+1)$, kun $t \neq 1$,	1
	ja $\lim_{t\to 1}(-2t(t+1)) = -4$ sekä $y = -\frac{1}{2}(-4) + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.	1
	$\Rightarrow$ Paraabelin kaarevuussäde eli kaarevuuskeskipisteen etäisyys pisteestä (1,1) on $\sqrt{(-4-1)^2 + \left(\frac{7}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.	1

13.	Piirros laadittu oikein ja tarkasti	2
	Esimerkki: Algoritmi antaa oikein esimerkiksi yksikköneliön alan. TAI Algoritmi toimii suorakulmiolle.	2
	Esimerkki: Algoritmi ei toimi nelikulmiolle, jonka muoto on "nuolenkärki". TAI Algoritmi ei toimi kunnolla sellaisten monikulmioiden kohdalla, jotka eivät ole kuperia (eli konvekseja), eli esimerkiksi sellaisen nelikulmion, jonka kärjet ovat $(1,-1)$, $(0,0)$, $(-1,-1)$, sekä $(0,1)$.	3
	Tätä algoritmia ei voi tällaisenaan käyttää, koska siinä ei ole kerrottu, miten toisiinsa yhdistettävät kärjet valitaan.	5