YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

Matematiikka, lyhyt oppimäärä 22.9.2020
Alustavat hyvän vastauksen piirteet 22.9.2020

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1.

Tämä tehtävä arvostellaan lautakunnassa keskitetysti, eikä opettajan tarvitse tehdä alustavaa arvostelua. Keskitetysti arvosteltavan vastauksen pisteet päivittyvät arvostelupalveluun lopullisen arvostelun edetessä.	
$(\frac{2}{5},1,\frac{5}{2},\dots)$	2
$y = 2(x+1)^2$	2
13,65 euroa	2
404 mm^2	2
$x = 4$	2
1	2

2.

Ratkaisut ovat $x = \pm\sqrt{7}$ $\approx \pm 2{,}65$.	2 1
Koska $7x^5 + 2 = -3x^5 + 4$, niin $10x^5 = 2$, joten $x^5 = \frac{1}{5}$, eli $x = \sqrt[5]{\frac{1}{5}} \approx 0{,}72$.	1 1 1
Koska $(3^x)^3 \cdot 3^4 = 3^{11}$, niin $3^{3x+4} = 3^{11}$ eli $3x + 4 = 11$, joten $x = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$.	1 1 1
Koska $13^x = 147$, niin $\lg 13^x = \lg 147$, joten $x \lg 13 = \lg 147$, eli $x = \frac{\lg 147}{\lg 13} \approx 1{,}95$.	1 1 1

3.

Suoran S_2 kulmakerroin on $\frac{5-(-1)}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$. Sen yhtälö on siis $y - (-1) = 2(x - (-1))$, eli $y = 2x + 1$. Yhtälöparin $y = 2x + 1$ ja $2x + 5y = 7$ ratkaisu on $x = \frac{1}{6}$ ja $y = \frac{4}{3}$.	2 2 2
Origossa olevan kulman voi laskea esimerkiksi määrittämällä y-akselista oikealle ja y-akselista vasemmalle olevien kulmien suuruudet. Näistä toisen tangentti on $\frac{2}{3}$ ja toisen $\frac{1}{4}$. Yhteensä kulman suuruus on siis noin 48 astetta. Origon vastaisen sivun pituus on Pythagoraan lauseen mukaan $\sqrt{(4-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$.	1 2 1 2

4.	Todennäköisyys, että molempien henkilöiden veriryhmä on A on $0{,}41^2$.	2
	Vastaavasti todennäköisyys, että molempien veriryhmä on B on $0{,}18^2$, AB $0{,}08^2$ ja O $0{,}33^2$.	2+2+2
	Lasketaan todennäköisyydet yhteen ja saadaan $0{,}41^2 + 0{,}18^2 + 0{,}08^2 + 0{,}33^2 = 0{,}3158 \approx 32\%$.	4
	$f'(x) = 4x^2 - 1 = 0$, kun $x = \pm\frac{1}{2}$,	3
	joista $x = -\frac{1}{2}$ ei kuulu välille $[0{,}1]$.	2
	Suurin arvo saavutetaan tarkasteluvälin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa.	2
	Koska $f(0) = 4$, $f(1/2) = \frac{11}{3}$ ja $f(1) = \frac{13}{3}$,	3
	niin suurin arvo on $f(1) = \frac{13}{3}$.	2

B1-osa

5.	Käyttämätön maa: $0{,}28 \cdot (1 - 0{,}05) \approx 27\%$.	2
	Asutusalueen osuus pysyy ennallaan.	1
	Laidunmaa: $0{,}37 \cdot (1 - 0{,}1) \approx 33\%$	2
	Viljelysmaa: $0{,}12 + 0{,}1 \cdot 0{,}37 \approx 16\%$	3
	Talousmetsä: $0{,}22 + 0{,}05 \cdot 0{,}28 \approx 23\%$	3
	Käytössä olevan maan osuus: $0{,}72 + 0{,}05 \cdot 0{,}28 \approx 73\%$	1

6.	Olkoon abiturienttien lukumäärä x ja ruoan hinta y.	1
	Ensimmäinen yritys (25 euroa henkeä kohti) tuottaa yhtälön $25x = y + 3$.	3
	Toinen yritys tuottaa yhtälön $27x = 1{,}1y + 0{,}8$.	3
	Ratkaisemalla yhtälöt saadaan $x = 5$ ja $y = 122$,	4
	eli abiturientteja oli 5 ja laskun loppusumma 122 euroa.	1

7.	Hammastahnan kerta-annos on $0{,}3^2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\,\mathrm{cm}^3$ ($\approx 0{,}141\,\mathrm{cm}^3$),	6
	eli perheen päiväannos on $8 \cdot 0{,}3^2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\,\mathrm{cm}^3 \approx 1{,}131\,\mathrm{cm}^3 = 1{,}131\,\mathrm{ml}$.	3
	Koska $\frac{90\,\mathrm{ml}}{1{,}131\,\mathrm{ml}} \approx 79{,}6 < 80$, ei hammastahna riitä kolmeksi kuukaudeksi.	3

8.	$a_2 = 1{,}02 \cdot 1000 + 100 = 1120$	2
	$a_3 = 1{,}02 \cdot 1120 + 100 = 1242{,}4$	1
	$a_4 = 1{,}02 \cdot 1242{,}4 + 100 = 1367{,}248$	1
	$a_5 = 1{,}02 \cdot 1367{,}248 + 100 \approx 1494{,}59$ euroa	2
	$p_2 = 0{,}95p_1 + 0{,}02e_1 \approx 12$ (Korppien lukumäärä ilmaistaan kokonaisluvulla.)	2
	$e_2 = 12 + 23(1 - 0{,}01 \cdot 23) \approx 30$	2
	$\Rightarrow e_3 = 12 + 30(1 - 0{,}01 \cdot 30) = 33$	2

9.	Ratkaisun tulee sisältää asianmukaiset kuvakaappaukset/selitykset. Pesiä on yhteensä 25 685 (suora lasku taulukkolaskentaohjelmalla).	 2
	Pienin on Helsingin yhdyskunta, suurin Rauman. Taulukkolaskentaohjelman keskiarvo- ja keskihajontakomennoilla saadaan keskiarvoksi 546,4894 ja keskihajonnaksi 576,4498.	1 2
	Katso taulukko. Kokkolan merimetsoyhdyskunta kuuluu välille [keskiarvo, keskiarvo + 1 keskihajonta].	 3
	Luokassa, jonka ylärajana on keskiarvo, suhteellinen frekvenssi on $\frac{30}{47}$, ensimmäisessä keskiarvoa suuremmassa luokassa $\frac{9}{47}$, sitä seuraavassa $\frac{4}{47}$ ja viimeisessä $\frac{4}{47}$. Frekvenssit pienenevät hyvin nopeasti, eli pieniä yhdyskuntia on paljon, keskikokoisia jonkin verran ja suuria todella vähän. Jakauma muistuttaa hiukan eksponenttijakaumaa.	 4

B2-osa

10.	Lyhennyskuukausia on $n = 15 \cdot 12 = 180$, korkotekijä $q = 1 + \frac{6}{12 \cdot 100} = 1{,}005$ ja lainapääoma $K = 100\,000$. Lasketaan annuiteettilainan kaavalla (MAOL): $100000 \cdot 1{,}005^{180} \cdot \frac{1-1{,}005}{1-1{,}005^{180}} \approx 843{,}86$, eli Annikalla on oltava käytettävissään noin 843,86 euroa kuukaudessa, että hän läpäisisi testin.	 2 3 1
	Katso liite.	6

11.	Tehtävänannon mukainen kuva	3
	Kun kolmioiden kantoina käytetään neliön sivuja, niin kaikki kannat ovat yhtä pitkiä (10 yksikköä), ja kolmioiden alojen suhteet määräytyvät korkeuksien mukaan. Vastakkaisten kolmioiden korkeuksien summa on 10 ja koska $A : D = 1 : 4$, niin kolmion A korkeus on 2 ja kolmion D korkeus 8. Vastaavasti $B : C = 2 : 3$, joten kolmion B korkeus on 4 ja kolmion C korkeus on 6. Pisteen P koordinaatit ovat siis (2,6).	 1 2 1 2 2 1

12.

Lasten pituus ja paino: positiivinen, kengännumero ja verenpaine: lähes nolla, bruttokansantuote asukasta kohti ja lapsikuolleisuus: negatiivinen, tikkatauluun osuneet tikat: lähes nolla	4
Kahden muuttujan välinen korrelaatio on positiivinen, jos muuttujien välillä on lineaarinen positiivinen riippuvuus eli molemmat vahvistuvat ja heikentyvät yhtä aikaa. Korrelaatio on negatiivinen, mikäli lineaarinen riippuvuus on olemassa, mutta toinen heikentyy toisen vahvistuessa. Korrelaatiokerroin saa arvoja välillä $[-1,1]$. Mitä suurempi korrelaatiokertoimen itseisarvo on, sitä vahvempi on lineaarinen riippuvuus. Korrelaatio on suurin piirtein nolla, mikäli lineaarista riippuvuutta ei ole.	4
Esimerkiksi jäätelön syöminen ja hukkuminen esitettynä siten, että tarkastellaan, miten monta ihmistä hukkuu minkäkin kuukauden aikana ja miten monta jäätelöä vastaavan kuukauden aikana on ostettu. Talvisin oletettavasti molempia tapahtumia on vähemmän kuin kesäkuukausina. Kuitenkaan jäätelönsyönti ei aiheuta hukkumisia eivätkä hukkumiset jäätelön syömistä, vaan kesä aiheuttaa molemmat.	4

13.

Koska derivaatta vaihtaa merkkiä pisteissä $x=-1$ ja $x=2$, on $p'(x)=0$ näissä pisteissä.	2
Koska $p(x)$ kulkee origon kautta, on oltava $p(0)=0$, eli $d=0$. Lisäksi $p'(x)=3ax^2+2bx+c$ Saadaan esimerkiksi seuraavat yhtälöt: $a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)=7$, $3a(-1)^2+2b(-1)+c=0$ ja $3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c=0$ Ratkaistaan yhtälöt (esimerkiksi laskimella) ja saadaan $a=2$, $b=-3$ ja $c=-12$, eli $p(x)=2x^3-3x^2-12x$.	1 1 1 3
Hyödyntämällä edellisessä kohdassa laskettuja kertoimia saadaan $p'(x)=6x^2-6x-12$.	4