YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

Matematiikka, pitkä oppimäärä kevät 2021

Alustavat hyvän vastauksen piirteet 24.3.2021

Korjattu 25.3.2021

Alustavat hyvän vastauksen piirteet on suuntaa-antava kuvaus kokeen tehtäviin odotetuista vastauksista ja tarkoitettu ensisijaisesti tueksi alustavaa arvostelua varten. Alustavat hyvän vastauksen piirteet eivät välttämättä sisällä ja kuvaa tehtävien kaikkia hyväksyttyjä vastauksia. Alustavat hyvän vastauksen piirteet eivät ole osa Ylioppilastutkintolautakunnan yleisissä määräyksissä ja ohjeissa tarkoitettua tietoa siitä, miten arvosteluperusteita on sovellettu yksittäisen kokelaan koesuoritukseen. Alustavat hyvän vastauksen piirteet eivät sido Ylioppilastutkintolautakuntaa lopullisen arvostelun perusteiden laadinnassa.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Tehtäväkohtaiset ohjeet

A-osa

1.

ei voi olla aritmeettinen eikä geometrinen	2
voi olla geometrinen	2
voi olla aritmeettinen	2
9	2
3	2
Funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimen. TAI virheellisesta mutta oikean suuntaisesta vastauksesta ”funktion maksimikohdan”.	2 1

2.

$\lvert\overline{u}\rvert = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$	3
$-\overline{u}$ on vastakkaissuuntainen vektoriin $\overline{u}$ verrattuna. Koska vektorin $\overline{u}$ pituus on 13, on kysytty vektori $-\frac{5}{13}\overline{u} = -\frac{25}{13}\overline{i} - \frac{60}{13}\overline{j}$.	1 2
Suoran L kulmakerroin on $\frac{4-(-8)}{4-(-1)} = \frac{12}{5}$, joten vektori ja suora ovat yhdensuuntaiset.	1 2
Koska suoran kulmakerroin on $\frac{12}{5}$ ja se kulkee pisteen (4,4) kautta, on sen yhtälö $y - 4 = \frac{12}{5}(x-4)$, eli $y = \frac{12}{5}x - \frac{28}{5}$.	1 2

3.

Lavennetaan oikean puolen lausekkeet: $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} = \frac{2-x}{(2+x)(2-x)} + \frac{2+x}{(2-x)(2+x)}$ $= \frac{2-x+2+x}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$	2 2
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}dx = \Big/_{-1}^{1} \ln\lvert 2+x\rvert$ $= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$	2 2
Koska $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2-(-x)}$, ovat integraalien $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2+x}dx$ ja $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2-x}dx$ arvot yhtä suuret. Koska $\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x})$, on kysytty integraalin arvo $\frac{2}{4}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 3$	1 1 2

4.

Käytetään derivointikaavaa $\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x$ Derivoidaan: $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}\tan x}{2+\tan^2 x} - \frac{\tan x}{(2+\tan^2 x)^2}\frac{d}{dx}(2+\tan^2 x)$ $= \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x} - \frac{\tan x}{(2+\tan^2 x)^2} \cdot 2\tan x(1+\tan^2 x)$ joka sievenee muotoon $\frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x}(2-\tan^2 x)$. Derivaatta on nolla vain silloin, kun $\tan x = \sqrt{2}$, sillä $\frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x} > 0$. Koska $f(x) \to 0$, kun $x \to 0$ tai $x \to \frac{\pi}{2}$, saavuttaa funktio suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa, ja se on $\frac{\sqrt{2}}{2+2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.	 2 1 2 2 2
Yhtälöstä $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ saadaan $\alpha = 2\arctan\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 39°$.	3

B1-osa

5.

Olkoot suorakulmion sivut x ja y, joista y on rantaviivaa myöten oleva sivu.	1
Yhdenmuotoisuuden nojalla $\frac{150-y}{150} = \frac{x}{120}$,	2
eli $x = \frac{150-y}{150} \cdot 120$.	1
Pinta-ala on $A(y) = \frac{150-y}{150} \cdot 120 \cdot y = \frac{120(150-y)y}{150}$.	2
Derivaatta on $A'(y) = \frac{120}{150}(150-2y)$.	2
$A'(y) = 0$, kun $y = 75$, ja tämä on maksimi, sillä $A'(50) = \frac{50\cdot 120}{150} > 0$ ja $A'(100) = -\frac{50\cdot 120}{150} < 0$.	2
Tällöin $x = 60$.	1
Kysytyt sivujen pituudet ovat siis 75 m ja 60 m.	1

6.

Olkoon alkuperäisen astian tilavuus V ja pinta-ala A.	2
Uuden astian tilavuus on $\frac{1}{4}V$,	2
jolloin sen pinta-ala on $\left(\frac{1}{4}\right)^{2/3} A$.	2
Pinta-alan ja tilavuuden suhde uudessa astiassa on siis $\frac{(\frac{1}{4})^{2/3}A}{\frac{1}{4}V} = 4^{1/3}\frac{A}{V}$	2
Kysytty suhde on siis $\frac{4^{1/3}\frac{A}{V} - \frac{A}{V}}{\frac{A}{V}}$	2
$= 4^{1/3} - 1 \approx 59$ %.	2

7.

Liisa voittaa ensimmäisellä heitolla, jos hän saa 4–6, eli todennäköisyys on $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.	2
Liisa tarvitsee enemmän kuin kaksi heittoa vain, jos kahdella ensimmäisellä heitolla tulee 1,1 tai 1,2 tai 2,1.	2
Kahta noppaa voi heittää $6 \cdot 6 = 36$ eri tavalla.	1
Todennäköisyys on siis $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $(= 0{,}083\ldots)$.	1
Koska tarvitaan vähintään kolme heittoa todennäköisyydellä $\frac{3}{36}$ ja yksi heitto riittää todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$, tarvitaan tasan kaksi heittoa todennäköisyydellä $1 - \frac{3}{36} - \frac{1}{2} = \frac{15}{36}$.	1
Neljä heittoa tarvitaan vain, jos kolme peräkkäistä heittoa tuottaa jokainen ykkösen, eli todennäköisyys on $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$.	1
Kolmen heiton todennäköisyys on siis $\frac{3}{36} - \frac{1}{216} = \frac{17}{216}$.	2
Odotusarvo on siis $\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{15}{36} + 3 \cdot \frac{17}{216} + 4 \cdot \frac{1}{216} = \frac{343}{216} \approx 1{,}6$.	2

8.

Ratkaisussa selitys/kuvakaappaus koodista. Pitäisi näkyä komennot, joilla x määritellään satunnaislukuna välillä [0,2], esim 2·rand(), vastaavasti y satunnaislukuna välillä [0,4], tarkistus if-lauseella, että ehto $y \geqslant x^2$ toteutuu, sekä laskuri, joka laskee toteutuneet tapaukset. Katso tiedosto: taulukko.	6
Eri arvontakerroilla saadaan eri luvut. Oheinen on siis vain yksi esimerkki mielekkäistä luvuista, jotka taulukointi voi antaa.	
Keskiarvo (komento average) on 665.	2
Ala on on siis noin $\frac{665}{1000}$ koko suorakulmiosta,	2
eli $\frac{665}{1000} \cdot 2 \cdot 4 \approx 5{,}3$.	2

9.	Riittää tutkia jatkuvuutta origossa, sillä muualla funktio on selvästi jatkuva.	1
	Määritetään $\lim_{x\to 0+} f(x)$.	1
	$\lim_{x\to 0+}(ax+1)^2 + a(1-a) = 1 + a - a^2$,	1
	joten funktio on jatkuva, kun $1 + a - a^2 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1$,	2
	eli $a = 0$ tai $a = 1$.	1
	Derivoituvuudesta seuraa jatkuvuus, joten kohdan 9.1 nojalla $a = 0$ ja $a = 1$ ovat ainoat mahdolliset arvot.	
	Tässä tapauksessa riittää tarkastella pistettä $x = 0$.	1
	Derivaatan raja-arvo vasemmalta tässä pisteessä on $3x^2 = 0$.	1
	Derivaatan raja-arvo oikealta on $\lim_{x\to 0+} \frac{(ax+1)^2+a(1-a)-1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{(ax)^2+2ax}{x} = 2a$.	2
	Siispä $2a = 0$,	1
	eli $a = 0$.	1

B2-osa

10.	(a) todistus, (b) määritelmä, (c) lause	3
	Todistus (a) osoittaa sen, että mikäli kolmion sivujen pituudet a b ja c toteuttavat ehdon $a^2 + b^2 = c^2$, niin kolmio on suorakulmainen. Todistuksessa lähdetään liikkeelle oletuksesta, että kolmion sivut toteuttavat tämän ehdon; tämän jälkeen verrataan suorakulmaiseen kolmioon, jonka kateetit ovat samat; osoitetaan, että tällöin hypotenuusakin on sama, jonka jälkeen todistus viimeistellään vetoamalla kolmioiden yhtenevyyteen (sss-lause).	4
	Olkoon luvun kymmenjärjestelmäesitys $a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0$.	1
	Tämä tarkoittaa sitä, että $n = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \cdots$.	1
	Koska $10^k = (9+1)^k \equiv 1 \pmod 3$,	2
	pätee $n \equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 3$.	1

11.	Otetaan molemmista luvuista 100^{99}. juuri.	2
	Vertailtaviksi jäävät luvut 99^{100^2} ja 101.	1
	Näistä ensimmäinen on suurempi.	1
	Tiedetään, että $1 = a_{2021} + a_{2020}$	1
	$= a_{2021} + a_{1010} = a_{2021} + a_{505}$.	1
	Lisäksi $1 = a_{505} + a_{504} = a_{505} + a_{252} = a_{505} + a_{126} = a_{505} + a_{63}$.	1
	$1 = a_{63} + a_{62} = a_{63} + a_{31}$.	1
	$1 = a_{31} + a_{30} = a_{31} + a_{15}$.	1
	$1 = a_{15} + a_{14} = a_{15} + a_7$.	
	$1 = a_7 + a_6 = a_7 + a_3$.	1
	Koska $a_1 = 1 = a_2$, pätee $a_3 = 0$.	1
	Siispä $a_7 = 1$, $a_{15} = 0$, $a_{31} = 1$, $a_{63} = 0$, joten $a_{505} = 1$, joten $a_{2021} = 0$.	1

12.	Pallojen keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion, jonka sivu on 6.	2
	Kolmion kärjen etäisyys on $\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ siitä kolmion pisteestä, joka on yhtä kaukana kaikista kolmion kärjistä.	2
	Pienen pallon keskipisteen etäisyys ison puolipallon keskipisteestä on $\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$.	2
	Merkitään ison puolipallon ja yhden pienen pallon sivuamispistettä kirjaimella X. Piirretään pisteestä X säde ison puolipallon keskipisteeseen.	2
	Tämän säteen on yhdyttävä pienen pallon säteeseen.	2
	Ison puolipallon säde on siis $3 + 4 = 7$.	2

13.		
	$P(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$, eli $p_2 = 1$ $p_1 = -5$ ja $p_0 = 6$. $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$, eli $q_2 = 1$, $q_1 = -\frac{5}{6}$ ja $q_0 = \frac{1}{6}$.	1 1
	$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - (\alpha_1+\alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2$, eli $p_2 = 1$ $p_1 = -(\alpha_1+\alpha_2)$ ja $p_0 = \alpha_1\alpha_2$ $Q(x) = \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right) = x^2 - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}x + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$, eli $q_2 = 1$ $q_1 = -\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}$ ja $q_0 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$.	1 1 1 1
	Tarkastellaan polynomia P muuttujan arvolla $\frac{1}{x}$: $P\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x} - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{x} - \alpha_2\right)\cdots\left(\frac{1}{x} - \alpha_n\right)$ $= \frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{x^n}\left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right)\left(\frac{1}{\alpha_2} - x\right)\cdots\left(\frac{1}{\alpha_n} - x\right)$ $= (-1)^n\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{x^n}\left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right)\cdots\left(x - \frac{1}{\alpha_n}\right)$, eli $(-1)^n\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{x^n}Q(x) = P\left(\frac{1}{x}\right)$. Toisaalta $(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = p_0$, joten $q_i = \frac{p_{n-i}}{p_0}$.	1 1 1 1 1 1