

Pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävien luokittelua ja analysointia

Helmi Glumoff, Matleena Paukkeri

Ainedidaktinen tutkimusseminaari

Syksy 2017

Ohjaaja Sari Harmoinen

Abstrakti

Lukion jälkeisiin jatko-opintomahdollisuuksiin vaikuttaa ylioppilastutkinto, johon sisältyy usein pitkän matematiikan ylioppilaskoe. Ylioppilastutkintolautakunnan mukaan koe perustuu lukion opetussuunnitelman mukaiseen matematiikan pitkään oppimäärään. Tutkimuksessa selvitetään, miten ylioppilaskokeiden tehtävät noudattavat asetettuja opetussuunnitelmia, miten tehtävät jakautuvat eri aihealueille, sekä kuinka syvällistä tiedon hallintaa tehtävien ratkaiseminen edellyttää. Aineistona ovat ylioppilaskokeet syksystä 2005 syksyyn 2017. Vuonna 2016 astui voimaan uusi lukion opetussuunnitelma, ja ylioppilastutkintolautakunta on muuttanut kokeen määräyksiä syksyn 2016 kokeesta eteenpäin. Laskimen käyttöä on rajoitettu. Lisäksi ylioppilaskokeet sähköistyvät parhaillaan ja matematiikan osalta tämä muutos tapahtuu keväällä 2019. Tutkimuksessa selvitetään, miten nämä muutokset vaikuttavat koetehtäviin.

Koetehtävät noudattavat hyvin opetussuunnitelmaa. Aihealueista painottuivat selkeästi Derivaatta-kurssin asiat, jonka jälkeen Geometria- ja Integraalilaskenta-kurssit. Koeuudistusten myötä Geometrian osuus kokeessa on suhteessa vähentynyt ja tehtävien aiheet jakautuvat tasaisemmin eri kursseihin. Eniten tehtävissä tarvitaan tiedon soveltamis- ja analysoimistaitoja. Uuden rakenteen mukaisissa kokeissa uuden luomista vaativia tehtäviä on erittäin vähän. Myös uusia tehtävätyyppejä on tullut, mikä helpottaa ilmeisesti sähköiseen kokeeseen siirtymistä. Tutkimuksen tuloksista toivotaan olevan apua lukion pitkän matematiikan opettajille ja opiskelijoille ylioppilaskokeeseen valmistautumisessa.

1. Johdanto

Ylioppilaskirjoitukset ovat tärkeä osa toisen asteen koulutusta ja niiden tulokset määrittävät yhä enemmän jatko-opiskelumahdollisuuksia. Koko lukio-opinnot tähtäävätkin osittain ylioppilaskokeisiin valmistautumiseen. Lukion oppimäärään kuuluvat sisällöt määräytyvät lukion opetussuunnitelmasta. Lukiolain mukaan, myös ylioppilaskirjoitukset testaavat opetussuunnitelman mukaisten asioiden oppimista. Tutkimuksessa pyritään selvittämään, kuinka hyvin pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa menestyy, jos hallitsee opetussuunnitelmaan kirjatut sisällöt.

Ylioppilaskokeet ovat muutoksen alla sähköistymisen vuoksi. Jo aiemmin tehtävyyteistä on ollut keskustelua entistä parempien laskimien sallimisen myötä. Syksystä 2016 eteenpäin matematiikan ylioppilaskokeen rakennetta muutettiin kaksiosaiseksi siten, että A-osassa ei saa käyttää laskinta ja B-osassa saa. Tutkimuksessa selvitetään, onko laskimen käytön rajoittaminen vaikuttanut tehtävien haastavuuteen ja onko ylioppilaskoetehtävissä havaittavissa yleisiä muutoksia, jotka edistäisivät sähköiseen ylioppilaskokeeseen siirtymistä. Ensimmäinen sähköinen matematiikan ylioppilaskoe järjestetään keväällä 2019.

Tutkimuksessa selvitetään myös, kuinka vaativaa tiedon soveltamista ylioppilaskoetehtävät vaativat ja kartoitetaan, painottuvatko joidenkin tiettyjen kurssien sisällöt toisia enemmän ja mitä asioita kurssien sisällä kysytään useimmin. Tuloksia vertaillaan kunkin kokeen arvosanapisterajoihin, joista on tarkoituksena selvittää, onko olemassa tiettyjä toistuvia tekijöitä, jotka tekevät kokeista helppoja tai vaikeita. Tutkimuksessa myös vertaillaan keväiden ja syksyjen kokeita toisiinsa.

Tutkimuksen ote on kvalitatiivinen. Tutkimuksessa käsitellään syksyn 2005 ja sitä uudempia pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtäviä. Nämä kokeet valittiin sillä perusteella, että vuoden 2003 lukion opetussuunnitelman perusteet astuivat voimaan syksyllä 2005. Mukaan on otettu myös uudemman (LOPS 2015), vuonna 2016 voimaan astuneen opetussuunnitelman mukaiset kokeet. Tutkimustuloksia on tarkoitus voida hyödyntää lukion matematiikan opetuksen suunnittelussa ja ylioppilaskirjoituksiin valmistautumisessa.

2. Teoriatausta

2.1 Matematiikan ylioppilaskokeiden määräyksiä

Ylioppilastutkintoon sisältyvä pitkän matematiikan koe perustuu matematiikan pitkään oppimäärään. Kokelaan opiskelema matematiikan oppimäärä ei määrää osallistumista pitkän tai lyhyen matematiikan kokeeseen, vaan kokelas saa tämän itse valita. Matematiikan kokeen tarkoitus on saada selville, onko opiskelija omaksunut lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaiset tiedot ja taidot sekä saavuttanut lukion tavoitteiden mukaisen riittävän kypsyyden oppiaineen hallinnassa. (Lukiolaki 18 §)

Ylioppilaskoetehtävät laaditaan lukiolain 10 §:n 1 momentin nojalla säädettyjen pakollisten ja syventävien kurssien oppimäärien mukaan. Kyseisen momentin mukaan opetussuunnitelman perusteisiin sisältyvistä opetuksen tavoitteista ja keskeisistä sisällöistä päättää opetushallitus.

Opetushallituksen hyväksymät opetussuunnitelmien perusteet otetaan huomioon ylioppilaskoetehtävien laatimisessa. Ylioppilaskokeessa koetehtävät pyritään järjestämään ylioppilastutkintolautakunnan taholta likimääräiseen vaikeusjärjestykseen helpoimmasta vaativimpaan, lukuun ottamatta syventävien kurssien tehtäviä, jotka ovat tehtäväsarjan lopussa. Tehtävät arvostellaan kokonaisiin pistein 0-6. (Ylioppilastutkintolautakunta 2017)

Syksystä 2005 syksyyn 2006 pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa oli 15 tehtävää, joista kokelas saa tehdä enintään 10. Kaikki tehtävät arvosteltiin asteikolla 0-6 pistettä.

Kevästä 2007 syksyyn 2015 kokeissa oli yhteensä 15 tehtävää, joista kokelas sai tehdä enintään 10. Tehtävien 1-13 maksimipistemäärä oli 6. Tehtävät 14 ja 15 olivat jokeritehtäviä, joiden maksimipistemäärä oli 9.

Kevään 2016 kokeessa oli A- ja B-osa ja B-osa jakautui vielä kahtia B1- ja B2-osiin. A-osassa tehtäviä oli neljä, joista jokaiseen vastataan koepaperille. A-osassa laskimen käyttö ei ollut sallittua, mutta taulukkokirjaa sai käyttää. B-osassa sekä laskimen, että taulukkokirjan käyttö oli sallittua ja tehtävät ratkaistiin erilliselle paperille. B1-osassa tehtäviä annettiin viisi, joista kolmeen vastattiin ja B2-osassa tehtäviä annettiin 4, joista kolmeen vastattiin. B1-osan tehtävä numero 9 oli jaettu tehtäviksi 9.1 ja 9.2, joista tuli valita toinen, jos valitsi tehtävän 9.

Syksyn 2016 kokeesta lähtien pitkän matematiikan kokeessa kokelas saa vastata enintään 10 tehtävään, joita on tarjolla 13. Koetehtävät jakautuvat kahteen osaan, A- ja B-osa, joista jälkimmäinen jakautuu vielä kahteen osaan, B1 ja B2. A-osassa tehtäviä annetaan neljä, joihin jokaiseen vastataan ja taulukkokirjaa saa käyttää mutta laskinta ei. B1-osassa tehtäviä annetaan viisi, joista kolmeen vastataan ja B2-osassa tehtäviä annetaan 4, joista kolmeen vastataan. Sekä laskin että taulukkokirja on sallittu kokonaan B-osassa. Sallittuja ovat kaikki funktio-, graafiset ja symboliset laskimet sekä taulukkokirjoista MAOL: MAOL-tilit, Otava, sekä vastaava ruotsinnos ja Ranta-Tiilikainen: Lukion taulukot, WSOY. (Ylioppilastutkintolautakunta 2017) Ylioppilastutkintolautakunta päättää kullakin tutkintokerralla arvosanarajat ja pyrkii siihen, että eri vuosien kokeiden arvosanat ovat keskenään vertailukelpoisia. (Ylioppilastutkintolautakunta 2017)

Ylioppilaskokeista annettavat arvosanat järjestyksessä parhaasta huonoimpaan ovat laudatur (L), eximia cum laude approbatur (E), magna cum laude approbatur (M), cum laude approbatur (C), lubenter approbatur (B), approbatur (A) ja improbatur (I), joista viimeinen annetaan hylätylle koesuoritukselle. (Valtioneuvoston asetus ylioppilastutkinnosta, 3 §)

2.2 Keskeisiä muutoksia lukion opetussuunnitelmissa

Suurin muutos opetussuunnitelmissa on, että vuoden 2015 opetussuunnitelman ensimmäinen matematiikan kurssi (Luvut ja lukujonot) on yhteinen sekä pitkän, että lyhyen matematiikan valitseville opiskelijoille. Tässä kurssissa on enemmän sisältöjä, kuin vanhan opetussuunnitelman mukaisessa pitkän matematiikan ensimmäisessä kurssissa, suurimpana muutoksena lukujonot, jotka vanhassa opetussuunnitelmassa kuuluivat kurssiin 9. Muidenkin kurssien nimet ja keskinäinen järjestys ovat muuttuneet jonkin verran ja kurssisisältöjä on sijoitettu uudelleen toisiin kursseihin. Muun muassa potenssien laskusäännöt olivat vuoden 2003 opetussuunnitelmassa kurssin 1 sisältö, kun taas vuoden 2015 opetussuunnitelmassa ne käsitellään vasta kurssissa 8. Yhdistetyn funktion derivoituminen siirtyi kurssista 8 (Juuri- ja logarifimifunktiot) kurssiin 7 (Trigonometriset funktiot). Vuoden 2015 opetussuunnitelman kurssi 7 (Trigonometriset funktiot) on suppeampi, kuin vuoden 2003, sillä lukujonot on siirretty

kurssiin 1 ja sen tilalle ei ole lisätty juurikaan muuta sisältöä. Uudessa opetussuunnitelmassa yhtälöryhmiä käsitellään Vektorit-kurssilla, kun vanhassa opetussuunnitelmassa ne kuuluivat Analyttiseen geometriaan.

Vuoden 2015 opetussuunnitelmassa teknisten apuvälineiden käyttöä on painotettu jokaisen kurssin tavoitteissa, kun vuoden 2003 opetussuunnitelmassa siitä on vain yksi maininta matematiikan yleisissä tavoitteissa.

2.3 Bloomin taksonomia

Bloomin taksonomia on Benjamin Bloomin johdolla kehitetty tunnettu luokitus oppimiseen liittyvistä tiedon tasoista. Bloomin taksonomiasta on kehitetty useita muunnelmia. Tässä tutkimuksessa on käytetty Lorin Andersonin ja David Krathwohlin uudistettua Bloomin taksonomiaa, jossa tiedon tasot on jaettu kuuteen luokkaan, jotka ovat järjestyksessä alimmasta korkeimpaan muistaa, ymmärtää, soveltaa, analysoida, arvioida ja luoda. Alkuperäistä Bloomin taksonomiaa käytettiin useimmiten luokittelussa, kun haluttiin selvittää opetussuunnitelman tai kokeen laajuutta ja kattavuutta (Krathwohl, 2002). Uudistetun Bloomin taksonomian luokittelulle ominaista on aktiivisten verbien käyttö. Nämä verbit kuvaavat tiedollista toimintaa, jota oppijan tulee ilmentää (Owen Wilson, 2016). Vaihtelevuus on erityisen tärkeää oppimistehtävien ja arvostelun suunnittelussa ja sen vuoksi taksonomian tasot on hyvä pitää apuna. Sen lisäksi, että tehtävien valinnassa voidaan hyödyntää taksonomian mukaista luokittelua, se näkyy usein tehtävien arvostelussa ja pisteytyksessä vielä selkämmin, sillä se arviointi määrittää, millaista osaamisen tasoa tehtävässä vaaditaan (Anderson 1999).

Muistamisen tasolla painopiste on opitun asian tunnistamisessa ja sen toistamisessa samassa muodossa, kuin missä ne on aiemmin esitetty. Tätä tietoluokkaa kuvaavia aktiivisia verbejä ovat muun muassa luettelee, toistaa ja tunnistaa. Ymmärtämisen tasolla tiedon merkityksen ja tarkoituksen ymmärtäminen yhdistyy muistitietoon. Tätä tietoluokkaa kuvaavia aktiivisia verbejä ovat muun muassa selittää, kuvaa, tiivistää ja muokkaa. Soveltamisen tasolla tavoitteena on osata käyttää tietoa oikeissa ja uudenlaisissa tilanteissa. Tätä tietoluokkaa kuvaavia aktiivisia verbejä ovat muun muassa havainnollistaa, soveltaa ja ratkaisee.

Analysoinnin tasolla on osattava pilkkoa ongelma osiin ja ymmärtää osien suhteet ja sen kautta tehdä päätelmiä. Tätä tietoluokkaa kuvaavia aktiivisia verbejä ovat muun muassa jäsentää, päättelee ja yleistää. Arvioinnin tasolla kyseenalaistetaan tietoa, kehitetään arviointikriteerejä ja arvioidaan saatujen ratkaisujen arvoa ja merkitystä. Tätä tietoluokkaa kuvaavia aktiivisia verbejä ovat muun muassa vertailee, arvioi ja päättelee. Luomisen tasolla on kyettävä luomaan jotain uutta olemassa olevan tiedon pohjalta. Tätä tietoluokkaa kuvaavia aktiivisia verbejä ovat muun muassa luo, suunnittelee ja yhdistelee (Owen Wilson, 2016). Jokainen taso sisältää myös alempien tasojen tavoitteet, sillä perustietojen varaan rakentuu korkeampi osaaminen.

2.4 Yhdysvaltojen opetussuunnitelma

Yhdysvaltojen matematiikan valtiollisissa standardeissa on lueteltu lukion (High School) tärkeimmät sisällöt aihealueittain. Ensimmäinen kokonaisuus on Numero ja lukumäärä. Sen tärkeimpiin sisältöihin kuuluvat murtopotenssi, rationaali- ja irrationaalilukujen ominaisuudet, yksiköiden käyttö ongelmanratkaisussa, kompleksilukujen laskutoimitukset sekä vektoreiden ja matriisien sovellukset. Toinen kokonaisuus on nimeltään Algebra ja siihen kuuluu polynomien laskutoimitukset, yhden muuttujan yhtälöt ja epäyhtälöt, yhtälöryhmät sekä yhtälöiden ja epäyhtälöiden graafinen ratkaiseminen. Kolmas kokonaisuus on Funktiot. Sen

keskeisiä sisältöjä ovat funktion käsite ja riippuvuussuhteen mallintaminen funktiolla, trigonometrisen funktioiden jaksollisuus ja yksikköympyrä. Neljäs kokonaisuus on mallinnus, joka sisältää matematiikan ja tilastotieteen ja ohjaa käyttämään niitä arkielämän ongelmien ratkaisuun. Viides kokonaisuus on Geometria, johon kuuluu yhdenmuotoisuus, suorakulmaisen kolmion trigonometria, ympyrä, geometrisen kuvion ja matemaattisen lausekkeen yhdistäminen, tilavuus sekä kaksi- ja kolmiulotteisen kuvion yhtäläisyydet. Kuuden kokonaisuus on Tilastot ja todennäköisyys. Siihen kuuluu tilastodatan tulkinta ja muodostus, riippumattomuus ja ehdollinen riippumattomuus, todennäköisyyden laskeminen osatodennäköisyyksien avulla, odotusarvo sekä todennäköisyyksien hyödyntäminen päätöksenteossa (Common Core State Standards for Mathematics).

Suomen Lukion opetussuunnitelmiin verrattuna Yhdysvalloissa kokonaisuuksia ja aihealueita on vähän. Erityisesti differentiaali- ja integraalilaskennan puuttuminen kokonaan on merkillepantavaa. Yhdysvaltojen standardeissa ei myöskään käsitellä kolmiulotteista avaruutta juuri ollenkaan, eikä matemaattista todistamista harjoitella. Suomessa taas kompleksiluvut eivät kuulu nykyiseen lukion opetussuunnitelmaan, mutta Yhdysvalloissa ne ovat osa valtion standardeja.

3. Aineisto, menetelmät ja tulosten käsittely

Tutkimusaineistona ovat pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävät syksystä 2005 syksyyn 2017. Tutkimusta varten haettiin Ylioppilastutkintolautakunnalta tutkimuslupa pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtäviin syksystä 2005 syksyyn 2017. Tutkimuslupapäätöksessään Ylioppilastutkintolautakunta myönsi luvan käyttää pyydettyjä tehtäviä tutkimusaineistona tässä tutkimuksessa.

3.1 Aineiston jaottelu kursseittain

Tutkimukseen rajattujen ylioppilaskokeiden jokainen tehtävä on jaoteltu Lukion opetussuunnitelman asettamien kurssien mukaisesti. Syksyn 2016 kokeen, ja siitä eteenpäin, tehtävät ovat jaoteltu vuoden 2015 Lukion opetussuunnitelman mukaan. Muiden kokeiden tehtävät ovat jaoteltu vuoden 2003 Lukion opetussuunnitelman mukaisesti. Jaottelussa tehtävä on merkitty sen kurssin kohdalle, jonka jälkeen tehtävässä tarvittavat tiedot on käyty läpi. Jotkut tehtävistä sisältävät useita alakohtia, jotka testaavat eri kurssien asioita, joten tällaisten tehtävien alakohtat ovat jaoteltu eri kurssien sisälle. Tulokset on koottu taulukoihin 1.1 ja 1.2.

Taulukko 1.1. Kurssikohtainen jaottelu, kurssit 1-7.

	Kurssi 1	Kurssi 2	Kurssi 3	Kurssi 4	Kurssi 5	Kurssi 6	Kurssi 7
Syksy 2005	1ac	1b	2, 5	6	3	8	4, 7, 9,
Kevät 2006	1, 4,		3, 8	6, 7		8	2a, 10, 12
Syksy 2006		5	1	3, 7	8	4	10 11, 14
Kevät 2007	1c, 3	1ab			5	4, 9	8 6, 7, 11
Syksy 2007	1c, 4	1a	6, 11a	1b, 5, *15		3	8 7, 12
Kevät 2008	1ab, 4,	1c		8	2ac, 7a	6	5 3a, 9, 10, 13a
Syksy 2008	7, *14	1ab, 3b, 10	4, 5, 9, *15	1c, 6, *15		11	8 2a, 12, 13
Kevät 2009	1a	1b	3b, 14*	1c, 8	3a		6 4, 7,
Syksy 2009	1bc, 2b	1a, 2a		4	6	5,	7 8, 9, 13
Kevät 2010	1b	1ac, 3b, 12	3a, 4, 10			5	6 7
Syksy 2010		1a, 2ac	9, 15*	4,	3a, 5		6 1c, 10
Kevät 2011	2a	1b,4		7	1c, 2b, 15*	8	6 1a, 5, 11, *15
Syksy 2011	1c, 2a, 4b	1a	1b, 15*	2b, 3c, 6b			8 3b, 6a, 9
Kevät 2012	1bc, 2a	1a, 2b	3, 9, 11, *15			4	2b, 6 7a,
Syksy 2012	1a	1bc, 2ab	4b, *15			9	8, *14 5

Kevät 2013		1ab, 3, *14ab	4, 10	1c, *15	2b, 7	6
Syksy 2013	2c	1ac	6,10	4, *14	3, 5	8 1b, 2a
Kevät 2014		1, 4	*14	5	8, 9	7 2, 3b, 11, 12
Syksy 2014	1c, 2ab	1a	*14	1b, 10,	4	7 6,
Kevät 2015		3 2b, 4	8	2a, 5		6, *14 9, 13
Syksy 2015	1c,	1a, 12	1b, 3 9, *15	2, 5 4, *14	6,	7
Kevät 2016	1abcf, 2b	1de, 2ac	6, 7, 11,	8,	3a,	5 4, 9.2
Syksy 2016		1, 5 2a, 13	6	12 7a, 11,	2b, 4, 9.2	
Kevät 2017		2	1	12	3 5a	7, 10
Syksy 2017		2	5	11	3 1a, 6, 12	1b, 4a

Taulukko 1.2. Kurssikohtainen jaottelu, kurssit 8-13.

	Kurssi 8	Kurssi 9	Kurssi 10	Kurssi 11	Kurssi 12	Kurssi 13
Syksy 2005		11	13 12, 14		15	10
Kevät 2006	2c, 13	5, 13, 14	2b, 9		15	11
Syksy 2006	2a		6, 12 2b, 13			15 9
Kevät 2007	2bc,		10		13, *15	12 *14
Syksy 2007		2a, 11b	2bc, 10			13 *14
Kevät 2008	2b	3b, *14ab	3a, 7b, 13b, *14cd		11	12 *15
Syksy 2008			2b, 3a	2c		
Kevät 2009	2b, 5		2c, 9, *15		11	12 10, 13,
Syksy 2009	3a	2c,11	3b, 10, *14, *15		12	
Kevät 2010	2c	2b, 9, *14, *15a	2a, 8, *15bcd		12	13 11, *15
Syksy 2010	*14	1b, 7, 8	2b, 3b		11	
Kevät 2011	2c, 3ab	9, *14abc	3c, 10, *14d		12	13
Syksy 2011	2c		10 4ac, *14ab		13	12 *14c
Kevät 2012	2cf, 5, 8, *14cd	2d, 10, 14ab	2e, 7b		12	13
Syksy 2012	2c, 3a, 7, 10, 13	3a, 4a, 11	3b, 6			12
Kevät 2013		5 2ac, 9, 11	8b, *14c		13	12 14d
Syksy 2013		9	2b, 7,		13	11 *15
Kevät 2014			6 3a, 10, *15		13	
Syksy 2014	2c, 3, 9, 11	8, *15		5	12	13
Kevät 2015			1, 7	10	11	12 *15
Syksy 2015		8	10		11	13
Kevät 2016			3b, 12		10	9,1
Syksy 2016		3 2c, 7b		8	9,1	10
Kevät 2017	4a	4b, 5b		11	9	6, 8 13
Syksy 2017	1c, 4b, 8		13	7, 9	10	

Seuraavassa kurssien nimet ovat vanhemman opetussuunnitelman (LOPS 2003) mukaisia ja järjestysnumeroista ensimmäinen on vuoden 2003 opetussuunnitelman mukainen ja jälkimmäinen vuoden 2015 (LOPS 2015). Ensin on tarkasteltu kokonaisten tehtävien määrää kurssia kohden. Eniten tehtäviä on selkeästi Derivaatta (7,6) kurssilta, jonka jälkeen paljon on myös Geometria (3,3) kurssilta. Seuraavaksi eniten tasaisesti kurseilta Trigonometriset funktiot ja lukujonot (9,7), Integraalilaskenta (10,9), Analyyttinen geometria (4,5) ja Todennäköisyys ja tilastot (6,10). Hieman edellisiä vähemmän on tehtäviä kurseilta Vektorit (5,4), Polynomifunktiot (2,2) sekä Juuri- ja logaritmifunktiot (8,8). Vähiten tehtäviä on kurseilta Funktiot ja yhtälöt (1,1), Lukuteoria ja logiikka (11,11), Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä (12,12) ja Differentiaali ja integraalilaskennan jatkokurssi (13,13).

Seuraavassa tarkastelussa on huomioitu tehtävien määrään myös osatehtävät. Selkeästi eniten on Derivaatta-kurssilta. Seuraavaksi eniten on kurseilta Integraalilaskenta ja Geometria. Näiden jälkeen tasaisesti kurseilta Trigonometriset funktiot ja lukujonot, Polynomifunktiot, Analyyttinen geometria ja Juuri- ja logaritmifunktiot. Edellistä hieman vähemmän kurseilta Funktiot ja yhtälöt, Todennäköisyys ja tilastot ja Vektorit. Vähiten tehtäviä on kurseilta Lukuteoria ja logiikka, Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä sekä Differentiaali ja integraalilaskennan jatkokurssi.

Molempien edellä tehtyjen tarkastelujen mukaan Derivaatta-kurssin mukaisia tehtäviä on selkeästi eniten. Tältä kurssilta jokaisessa kokeessa on keskimäärin 2 kokonaista tehtävää, joiden määrä siis vaihtelee yleensä yhdestä kolmeen. Kevään 2003 kokeessa ei ollut ollenkaan tämän kurssin tehtävää, muissa kokeissa tehtäviä on ollut vähintään yksi.

Geometria ja Integraalilaskenta -kurssien tehtäviä on molemmissa edellä tehdyissä vertailuissa seuraavaksi eniten. Geometria kurssin tehtävät ovat pääsääntöisesti kokonaisista tehtäviä, kun taas Integraalilaskenta-kurssin tehtävät ovat pääsääntöisesti tehtävän alakohtia. Geometria-kurssin tehtäviä on keskimäärin hieman alle kaksi yhtä koetta kohden ja tehtävien määrä vaihtelee yhdestä neljään. Integraalilaskenta-kurssin asiaa kysytään pääsääntöisesti kahdesta neljään tehtävässä kussakin kokeessa.

Vähiten tehtäviä on edellä tehtyjen vertailujen mukaan valtakunnallisista syventävistä kursseista eli Lukuteoria ja logiikka, Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä ja Differentiaali ja integraalilaskennan jatkokurssi. Näiden kurssien tehtäviä on yhteensä yhdestä neljään jokaisessa kokeessa, keskimäärin kuitenkin kaksi tehtävää. Vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisissa kokeissa nämä tehtävät ovat yleensä 11.-15. tehtäviä. Pakollisten kurssien osalta, vähiten on tehtäviä Funktiot ja yhtälöt sekä Vektorit -kursseilta. Myös Juuri- ja logaritmifunktiot sekä Polynomifunktiot -kursseilta on suhteellisen vähän tehtäviä.

Uuden opetussuunnitelman (LOPS 2015) mukaisien kokeiden tarkastelun jälkeen voidaan tehdä seuraavia huomiota. Huomioidaan kuitenkin, että tämän opetussuunnitelman mukaisia kokeita on tutkimukseen rajatussa aineistossa vain kolme (syksy 2016, kevät 2017 ja syksy 2017). Geometria-kurssin tehtäviä on huomattavasti vähemmän, kun jokaisessa uudemmän opetussuunnitelman mukaisessa kokeessa tehtäviä on yksi ja muissa kokeissa keskimäärin kaksi. Myös ensimmäisen ja toisen kurssin tehtäviä on vähemmän verrattuna aikaisimpiin, mutta näiden kurssien asiasisällöt ovat vaihtuneet eniten. Derivaatta-kurssin tehtäviä on selkeästi eniten, tämä ei ole siis muuttunut verrattuna aikaisempaan. Integraalilaskenta-kurssin tehtäviä voi olla hieman vähemmän kuin kokonaistarkastelussa. Toisaalta tehtävät jakautuvat tasaisemmin jokaiselle kurssille, tämä voi johtua kokeessa olevien tehtävien määrän laskusta.

3.2 Aineiston vertailu opetussuunnitelmiin

Jokaista tutkimukseen rajattua tehtävää on verrattu Lukion opetussuunnitelman mukaisiin oppimistavoitteisiin ja opetuksen keskeisiin sisältöihin. Opetussuunnitelmassa nämä oppimistavoitteet ja opetuksen keskeiset sisällöt on annettu kurseittain. Jälleen syksyn 2016 kokeen, ja siitä eteenpäin, tehtävät ovat jaoteltu vuoden 2015 Lukion opetussuunnitelman mukaisesti ja muiden kokeiden tehtävät ovat jaoteltu vuoden 2003 Lukion opetussuunnitelman mukaisesti. Opetussuunnitelmien mukaiset kurssit on lueteltu taulukossa 2. Vertailussa on katsottu tehtävän aiheisälttöä, painottuuko jokin aihe tai onko jokin aihe jäänyt vähemmälle huomiolle. Lisäksi arvioidaan, tarvitaanko tehtävässä opetussuunnitelman yli menevää tietoa.

Taulukko 2. Lukion opetussuunnitelmien 2003 ja 2015 mukaiset kurssit.

	LOPS 2003	LOPS 2015
Kurssi 1	Funktiot ja yhtälöt	Luvut ja lukujonot
Kurssi 2	Polynomifunktiot	Polynomifunktiot ja -yhtälöt
Kurssi 3	Geometria	Geometria
Kurssi 4	Analyttinen geometria	Vektorit
Kurssi 5	Vektorit	Analyttinen geometria
Kurssi 6	Todennäköisyys ja tilastot	Derivaatta
Kurssi 7	Derivaatta	Trigonometriset funktiot
Kurssi 8	Juuri- ja logaritmifunktiot	Juuri- ja logaritmifunktiot

Kurssi 9	Trigonometriset funktiot ja lukujonot	Integraalilaskenta
Kurssi 10	Integraalilaskenta	Todennäköisyys ja tilastot
Kurssi 11	Lukuteoria ja logiikka	Lukuteoria ja todistaminen
Kurssi 12	Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä	Algoritmit matematiikassa
Kurssi 13	Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi	Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi

Kurssin 1 (LOPS 2003 Funktiot ja yhtälöt, LOPS 2015 Luvut ja lukujonot) sisällöistä ainoat opetussuunnitelman ulkopuoliset asiat olivat jo peruskoulusta tuttuja, kuten yhtälöparin ratkaiseminen ja yksikönmuunnokset. Opetussuunnitelman asioista eniten tehtävissä esiintyy prosenttilaskenta ja yhtälön ratkaiseminen.

Kurssin 2 (LOPS 2003 Polynomifunktiot, LOPS 2015 Polynomifunktiot- ja yhtälöt) tehtävät ovat opetussuunnitelman mukaisia ja pääsääntöisesti ratkaise, sievennä ja osoita, että -tyyppisiä ja testaavat pääsääntöisesti polynomifunktion sekä toisen asteen yhtälön käsittelemisen hallintaa.

Kurssin 3 (Geometria) tehtävässä syksyllä 2008 kysyttiin projektiota, mikä ei ole opetussuunnitelman mukainen sisältö. Muilta osin tehtävät ovat sisältäneet vain opetussuunnitelman mukaisia asioita, joista eniten painottuvat kuvioiden ja kappaleiden pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen.

Analyyttinen geometria -kurssin (LOPS 2003 kurssi 4 ja LOPS 2015 kurssi 5) tehtävissä testataan hyvin ymmärrystä ja soveltamistaitoja uuteen tilanteeseen. Tehtävien joukosta löytyy myös perustehtäviä, joissa valmiiseen, MAOL:sta löytyvään, kaavaan sijoittamisella pääsee jo pitkälle. Kuitenkin ymmärrystä tarvitaan enemmän kuin kaavan sijoittamistaitoja. Tehtävät liittyvät enimmäkseen suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälöihin sekä pisteen etäisyyden suorasta -laskemiseen. Harvemmin oli tehtäviä itseisarvo- ja epäyhtälöistä sekä yhtälöryhmiä.

Vektorit-kurssin (LOPS 2003 Kurssi 5 ja LOPS 2015 Kurssi 4) tehtävät noudattivat lähes täysin opetussuunnitelmaa. Vuoden 2003 opetussuunnitelma ei sisältänyt yhtälöryhmiä, mutta niihin liittyvä tehtävä oli kevään 2014 kokeessa. Vuoden 2013 opetussuunnitelmassa yhtälöryhmät ovat mukana. Eniten painottuvat osa-alueet ovat olleet vektoreiden yhdensuuntaisuus ja skalaaritulo.

Todennäköisyys ja tilastot kurssin (LOPS 2003 Kurssi 6 ja LOPS 2015 kurssi 10) tehtävissä noudatetaan opetussuunnitelmaa, ja pääsääntöisesti tehtävissä tarvitaan klassisentodennäköisyyden laskemisen taitoja. Tehtävissä testataan todennäköisyyden käsitteen sekä siihen liittyvien laskusääntöjen hallintaa. Odotusarvoa myös kysytään paljon. Tehtävät liittyvät harjoiin normaalijakaumaan tai tiheysfunktioon.

Derivaatta-kurssin (LOPS 2003 Kurssi 7 ja LOPS 2015 Kurssi 6) tehtävät noudattivat täysin opetussuunnitelmien määrittämiä keskeisiä sisältöjä. Ääriarvojen määrittäminen painottuu voimakkaasti. Kokeissa on paljon sellaisia derivoimistehtäviä, jotka eivät liity varsinaisesti tähän kurssiin, esim. logaritmi- ja eksponenttifunktioiden sekä trigonometristen funktioiden derivointi.

Kurssin 8 (Juuri- ja logaritmifunktiot) tehtävien ratkaisemisessa ei tarvitse osata opetussuunnitelman yli meneviä asioita. Tehtävät enimmäkseen testaavat juuri- ja logaritmifunktioiden derivoimistaitoja, antamalla puhtaasti valmiin funktion, jota täytyy derivoida. Lisäksi on myös soveltamistaitoja vaativia tehtäviä, joissa useassa tarvitaan ylimääräistä tietoa, jotka kaikki on tehtävänannossa kuitenkin annettu ja sitä pitää osata käyttää. Tehtävät ovat monipuolisesti kurssin eri asioista, mutta käänteisfunktio-tehtäviä on harvoin.

Trigonometriisiin funktioihin liittyvät tehtävät ovat aina olleet opetussuunnitelman mukaisia (LOPS 2003 Kurssi 9: Trigonometriset funktiot ja lukujonot, LOPS 2015 Kurssi 7: Trigonometriset funktiot). Eniten on painotettu trigonometrinen yhtälöiden ratkaisemista ja trigonometrinen funktioiden derivaattaa. Vuoden 2003 Lukion opetussuunnitelman mukainen kurssi sisältää myös lukujonot ja niihin liittyvistä tehtävistä opetussuunnitelman ulkopuolella ovat lukujonon ja summan raja-arvon ja derivaatan määrittäminen. Geometrinen jono esiintyy tehtävissä useammin, kuin aritmeettinen.

Integraalilaskenta (LOPS 2003 kurssi 10, LOPS 2015 kurssi 9) -kurssin tehtävät ovat pääsääntöisesti joko valmiiksi annetun integraalin tai annettujen käyrien välisen pinta-alan laskemista. Välillä tehtävissä kysytään tilavuutta annetun käyrän muodostamalle pyörähdyskappaleelle. Välillä on myös sanallisia ja soveltavia tehtäviä liittyen pinta-alan tai tilavuuden laskemiseen. Välillä on myös haastavia tehtäviä, jotka menevät hieman opetussuunnitelman yli, nämä tehtävät ovat jokeritehtäviä (*14 tai *15).

Kurssin 11 (LOPS 2003 Lukuteoria ja logiikka, LOPS 2015 Lukuteoria ja todistaminen) kaikki tehtävät ovat olleet opetussuunnitelman mukaisia. Matemaattinen todistaminen ja kokonaislukujen jaollisuus painottuvat tehtävissä. Kurssiin liittyvät tehtävät hyvin harvoin logiikkaan ja totuustauluihin.

Kurssin 12 (LOPS 2003 Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä, LOPS 2015 Algoritmit matematiikassa) tehtävissä aika usein testataan Newtonin menetelmän hallintaa. Tehtävänannossa usein suoraan ohjataan sitä käyttämään ja välillä täytyy itse osata valita tämä, kun pyydetään valitsemaan sopiva matemaattinen menetelmä. Puolisuunnikkasääntöä, iterointia ja jaollisuutta testataan myös, mutta harvemmin. Tehtävät eivät ylitä opetussuunnitelmaan kirjattuja sisältöjä.

Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssiin (Kurssi 13) liittyviä tehtäviä on ollut vain noin joka toisessa kokeessa. Kaikki tehtävät ovat käsitelleet opetussuunnitelman mukaisia asioita ja eniten on keskitytty raja-arvoihin äärettömyydessä sekä lukujonoihin.

3.3 Bloomin taksonomian mukainen jaottelu

Jokainen tehtävä on jaettu johonkin Bloomin taksonomian kuudesta luokasta. Tehtävä on merkitty siihen luokkaan, joka on korkein tehtävässä tarvittava ajattelun taso. "Muistaa"-tehtäviksi luokiteltiin mekaaniset sievennystehtävät ja pelkästään kaavaan sijoittamalla ratkaistavat tehtävät. "Ymmärtää"-luokan tehtäviksi laskettiin sellaiset perustehtävät, joissa tarvittiin jotain omaa tulkintaa, eikä vastausta saa suoraan kaavasta. "Soveltaa"-luokkaan sijoitettiin tehtävät, joiden laskut ovat yksinkertaisia, mutta lausekkeen tai yhtälön muodostamiseksi on osattava soveltaa perustietoa. "Analysoida"-tehtäväluokkaan laitettiin tehtävät, joissa pyydettiin osoittamaan väitteen paikkansapitävyys tai yksinkertaiset tehtävät, joissa pyydettiin määrittämään vakion arvo, jolla väite pätee. Haastavimmat vastaavat tehtävät, joissa pyydettiin määrittämään vakion arvo, sijoitettiin "Arvioida"-luokkaan, mikäli tehtävässä oli paljon eri asioita, joita täytyi huomioida vakion määrittelyssä. "Luoda"-luokkaan sijoitettiin tehtävät, joissa pyydetään itse johtamaan kaava jollekin asialle tai joissa on määritelty jokin ennalta tuntematon matemaattinen sääntö ja sen avulla on pyydetty todistamaan jotain. Luokittelun tulokset on kirjattu taulukkoon 3.

Taulukko 3. Bloomin taksonomian mukainen jaottelu

	Muistaa	Ymmärtää	Soveltaa	Analysoida	Arvioida	Luoda
Syksy 2005		1, 4, 7	2, 3, 5, 6, 9, 10, 12	8, 11	13, 15	14
Kevät 2006	1a, 2	1b, 15	3, 4, 6, 9	7, 8, 12, 13, 14	5, 10,	

Syksy 2006	1, 2,	4, 5, 6,	3, 7, 10,	8, 11, 12, 13,	9, 14, 15	15,
Kevät 2007	1, 2		3, 4, 5, 7, 9	10, 11, 12, 13, *15	8	*14
Syksy 2007	1ac, 2ab	1b, 2c	4, 5, 6, 7, 10	3, 8, 11, 12, 13, *14	*15	
Kevät 2008	1ab, 2bc,	1c, 2a, 3, 7a, 9, 11,	4, 5, 7b, 8,	6, 10,	12, 13, *14, *15	
Syksy 2008	1ab, 2a, 3,	1c, 2bc, 7, 8,	4, 5, 6,	9, 10, 11, *14,	12, 13,	*15
Kevät 2009	1ab, 2	1c, 3a, 4	7, 8, 9,	6, 10, 13, *15	11, 12	
Syksy 2009	1ab, 2, 3b	3a, 5, 8, 10	1c, 4, 6, 9, 13	7, 11, 12, *14	*15	
Kevät 2010	1, 2,	3a, 5, 6,	3b, 4, 7, 8, 10,	9, 11, 12, 13,	*14, *15	
Syksy 2010	1, 2,	6, 7, 11,	3b, 4, 5, 9,	3a, 8, 10, 12,	13, *14,	*15
Kevät 2011	1, 2c, 3	2ab, 5, 9, 10, 11	4, 6, 7, 8, 13	12, *14		*15
Syksy 2011	1ac, 2ac, 3ab, 6b	1b, 2b, 3c, 4b, 5, 6a	4ac, 7, 9	8, 11, 13,	12	*14, *15
Kevät 2012	1, 2,	3, 10,	5, 6, 9, 13,	4, 7, 8, 12,		11, *14, *15
Syksy 2012	1, 2,	3, 4b, 5, 13,	4a, 6, 8,	7, 9, 11, 12,	10, *14, *15bcd	*15a
Kevät 2013	1ab, 3b	1c, 2, 5, 8, 9, 14ab	6, 3a, 4, 10, 7, 11, 13		12, *14	*15
Syksy 2013	1ab, 2ab	1c, 2c, 7	3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11	13, *14	*15	
Kevät 2014	1ac	1b, 2, 7,	3, 5, 9, 11,	4, 6, 8, 12, 13,	10,	*14, *15
Syksy 2014	1a, 2c	1bc, 2ab,	3, 4, 5, 6,	7, 8, 9, 10, 11, 13,	12,	*14, *15
Kevät 2015	2b, 4a	1, 2a, 4b, 5	3, 7	6, 11, 13, *14	10, 12, *15	
Syksy 2015		1, 2, 3,	4, 5, 6, 7, 8, 9, 12	10, 11	13, *14	*15
Kevät 2016	1, 2a,	2bc, 3, 4,	5, 6, 7, 8, 10,	9.1, 9.2, 12, 13,	11,	
Syksy 2016	2,	1,	3a, 4, 5, 8,	3b, 6, 7, 9.1, 9.2,	10, 11, 12,	11,
Kevät 2017	1a, 4a	1bc, 2, 5a, 4b	3, 7, 12	6, 9	8, 10, 11, 13	
Syksy 2017	1,	2, 13	3, 5, 6,	4, 10, 12,	7, 8, 9, 11	

Eniten painottuvat soveltamis- ja analysointitehtävät. Yli puolet kokeiden tehtävistä on kuulunut näihin ryhmiin. Muutamissa kokeissa on myös ollut paljon ymmärtämistä vaativia tehtäviä, mutta yleensä niitä on muutama.

Jokaisessa kokeessa on ollut ainakin yksi arviointi- tai luomistehtävä, mutta kaikissa ei ole ollut molempia. Melkein jokainen jokeritehtävä (merkitty *-merkillä) vaatii analysoinnin tai luomisen tasoa. Pelkkää muistamista vaativia tehtäviä on usein ollut vain pari, yleensä tehtävien 1 tai 2 osana. Tehtävien numerointi noudattaa melko hyvin niiden vaikeusastetta: kokeen alkupäässä on helpompia ja loppupäässä vaikeampia tehtäviä.

Kevään 2016 kokeesta eteenpäin kokeen A-osassa (tehtävät 1-4) laskimen käyttö ei ole ollut sallittua. Tämä ei kuitenkaan näy tehtävien haastavuudessa. Sekä uuden, että vanhan muotoisissa kokeissa tehtävät 1 ja 2 ovat usein muistamis- ja ymmärtämistehtäviä ja tehtävät 3 ja 4 usein ymmärtämis- ja soveltamistehtäviä, joskus myös analysointitehtäviä. Uuden rakanteen mukaisissa kokeissa luomistehtäviä on ollut erittäin vähän, vain 1 neljässä kokeessa. Jokaisessa uuden rakanteen mukaisessa kokeessa on ollut monivalintatehtävä, ”järjestä välivaiheet”- tai ”yhdistä parit” –tyyppinen tehtävä. Näissä tehtävissä ei vaadita mitään perusteluja, ainoastaan vastausrivi, joten tämän kaltaisia tehtäviä olisi helppo toteuttaa myös sähköisinä ylioppilaskoetehtävinä, sillä tietokoneohjelma osaa tarkistaa ne automaattisesti.

Uudessa opetussuunnitelmassa painotetaan analysoinnin taitoja ja huomiota halutaan matematiikassa siirtää pois mekaanisesta laskemisesta. Tämäkin näkyy uusina tehtävätyypeinä. Esimerkiksi kevään 2017 tehtävässä 10 pyydettiin analysoimaan valmiita tehtävän ratkaisuja ja korjaamaan niistä virheet sen sijaan, että olisi pyydetty ratkaisemaan tehtävä.

3.4 Keväiden ja syksyjen kokeiden vertailua

Keväiden kokeissa eniten on soveltamistehtäviä. Niiden määrä vaihtelee kahdesta kuuteen, keskimäärin niitä on 4,1 tehtävää koetta kohden. Toiseksi eniten kokeissa on analysointitehtäviä, joiden määrä on vaihdellut nolasta seitsemään, keskimäärin 3,4 tehtävää kokeessa. Kolmanneksi eniten on ymmärtämistehtäviä: 2,6 tehtävää koetta kohden, vaihtelua on nollan ja viiden tehtävän välillä. Arviointitehtäviä on ollut keskimäärin 1,8 (vaihtelu välillä

nollasta neljään) ja muistamistehtäviä 1,7 koetta kohden (yksi tai kaksi tehtävää koetta kohti). Luomistehtäviä on ollut nollasta kolmeen, keskimäärin vain 0,7 tehtävää koetta kohti.

Keväisin eniten tehtäviä on ollut Derivaatta-kurssista. Myös geometrian, integraalilaskennan ja trigonometrinen funktioiden ja lukujonojen kurssit painottuvat. Vähiten tehtäviä on ollut Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssista sekä juuri- ja logaritmifunktioiden kurssista. Myös Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä -kurssin tehtäviä on vähän. Valtakunnallisten syventävien kurssien tehtäviä on ollut keskimäärin 2,8 koetta kohti.

Syksyn kokeissa soveltamistehtäviä on eniten, niiden määrä vaihtelee kolmesta seitsemään, keskimäärin tehtäviä on 4,5 koetta kohden. Seuraavaksi eniten on analysointitehtäviä, joiden määrä vaihtelee kahdesta seitsemään, keskimäärin tehtäviä on 3,8 koetta kohden. Kolmanneksi eniten on ymmärtämistehtäviä, joiden määrä vaihtelee yhdestä viiteen, keskimäärin tehtäviä on kolme koetta kohden. Arviointitehtävien määrä vaihtelee yhdestä neljään, keskimäärin tehtäviä on kaksi koetta kohden. Hieman edellisiä vähemmän on muistamistehtäviä, joiden määrä vaihtelee nollasta kahteen, keskimäärin puolitoista tehtävää koetta kohden, kun lasketaan kokonaisten tehtävien määrä. Vähiten on luomistehtäviä, joiden määrä vaihtelee nollasta kahteen ja keskimäärin alle yksi tehtävä koetta kohden.

Syksyn kokeissa eniten tehtäviä on Geometria, Derivaatta ja Integraalilaskenta -kurseilta. Vähiten tehtäviä on Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä -kurssilta sekä Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssista. Hieman edellisiä enemmän, kuitenkin melko vähän, on tehtäviä kurseilta Lukuteoria ja logiikka, Funktiot ja yhtälöt sekä Polynomifunktiot. Valtakunnallisten syventävien kurssien tehtäviä on keskimäärin kaksi jokaisessa kokeessa.

Sekä keväällä että syksyllä eniten tehtäviä on kurseilta Derivaatta, geometria ja Integraalilaskenta. Vähiten tehtäviä on ollut kurseilta Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä sekä Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi. Toisin kuin kevään kokeissa, syksyn kokeissa ei painotu Trigonometriset funktiot ja lukujonot -kurssi, eikä Juuri- ja logaritmifunktiot -kurssilta ole erityisen vähän tehtäviä.

Kevään ja syksyn kokeiden välillä ei ole eroja tehtävien jakautumisessa Bloomin taksonomian tasoille. Myös tehtävien määrät kullakin tasolla ovat samaa luokkaa. Eniten on soveltamis- ja analysoimistehtäviä ja vähiten on luomistehtäviä.

Valtakunnallisten syventävien kurssien tehtävien määrän ero syksyn ja kevään kokeissa on huomattava, kevään kokeissa näitä on keskimäärin liki kolme ja syksyn kokeissa kaksi.

3.5 Kokeiden arvosanapisterajojen tarkastelu

Kokeiden vaikeusasteen mukaista luokittelua varten koetehtävät on jaettu Bloomin taksonomian tasojen avulla kolmeen ryhmään: helpot (muistaminen ja ymmärtäminen), keskitasoiset (soveltaminen ja analysointi) sekä vaikeat (arviointi ja luominen). Jokaiselle kokeelle on laskettu jokaista tehtäväryhmää vastaava prosenttiosuus sekä lisäksi on laskettu valtakunnallisiin syventäviin kurseihin liittyvien tehtävien määrä. Näitä kokeen vaikeuteen liittyviä lukuja on verrattu kunkin kokeen arvosanoihin approbatur (A) ja eximia cum laude approbatur (E) oikeuttaviin pisterajoihin. Tarkasteluun valittiin A:n raja, sillä se on alin hyväksytty arvosana. E valittiin, koska toinen vertailuraja haluttiin arvosana-asteikon yläpäästä ja laudaturia pidettiin liian marginaalisena osana koetuloksista. Luokittelu on koottu taulukkoon 4.

Taulukko 4. Arvosanapisterajojen tarkastelu

	Helpot (%)	Keskitaso (%)	Vaikeat (%)	Syv. teht.	A:n raja	E:n raja
Syksy 2005	20	60	20	2	13	45
Kevät 2006	21	64	14	2	10	42
Syksy 2006	33	47	20	2	8	38
Kevät 2007	14	71	14	4	10	43
Syksy 2007	13	80	7	2	8	37
Kevät 2008	37	37	27	3	14	51
Syksy 2008	33	47	20	0,33	10	44
Kevät 2009	31	54	15	4	11	46
Syksy 2009	38	56	7	1	8	47
Kevät 2010	30	57	13	4	11	45
Syksy 2010	33	47	20	1	7	39
Kevät 2011	47	47	7	2	12	51
Syksy 2011	42	38	20	2,33	10	49
Kevät 2012	27	53	20	2	13	50
Syksy 2012	37	43	20	1	9	47
Kevät 2013	40	43	17	3	11	49
Syksy 2013	20	73	7	3	7	47
Kevät 2014	20	60	20	1	13	44
Syksy 2014	13	67	20	2	8	43
Kevät 2015	27	40	23	3	9	43
Syksy 2015	20	60	20	2	7	39
Kevät 2016	31	62	8	2	9	35
Syksy 2016	14	64	21	2	8	42
Kevät 2017	31	46	23	4	9	39
Syksy 2017	23	46	31	1	8	39

Keväästä 2007 syksyyn 2015 kokeen maksimipistemäärä oli 66 pistettä (10 tehtävää, joista kaksi voi olla jokeritehtäviä). Muissa kokeissa maksimipistemäärä on ollut 60 pistettä (10 tehtävää, ei jokeritehtäviä). Keväiden kokeissa A:n raja vaihtelee 9-14 pisteessä ja keskiarvo on 11 pistettä. E:n raja vaihtelee 35-51 pisteessä ja keskiarvo on 44,83 pistettä. Syksyjen kokeissa A:n raja vaihtelee 7-13 pisteessä ja keskiarvo 8,54p ja E:n raja vaihtelee 37-49 pisteessä ja keskiarvo 42,76p.

Syksyllä 2005 keskitason tehtävät painoutuivat (60%) ja helppoja ja vaikeita tehtäviä oli yhtä paljon (20%). A:n raja syksyn kokeista korkein (13p) ja E:n raja keskitasoa. Keväällä 2006 64 % tehtävistä oli keskitason ja myös A:n ja E:n rajat olivat keskitasoa. Syksyllä 2006 tehtävien jakautuminen eri vaikeus tasoille suhteellisen tasaista, kuitenkin keskitason tehtävät hieman painoutuivat. E:n raja oli matala (38p) ja A:n raja keskitasoa. Keväällä 2007 71 % tehtävistä oli keskitasoisia, mutta syventävien kurssien tehtäviä oli 4, mikä on tavallista enemmän. Arvosanarajat olivat keskitasoa.

Syksyllä 2007 Keskitason tehtävät selvästi painoutuivat (80%) ja vaikeita tehtäviä vain 1 eli 7%. A:n raja oli keskitasoa ja E: raja syksyn kokeista matalin, 37 pistettä. Tämä johtuneet vaikeiden tehtävien vähäisestä määrästä. Keväällä 2008 helppoja tehtäviä oli 37 %. Vaikeita tehtäviä oli 27 % (enemmän kuin missään muussa kokeessa) ja arvosanarajat olivat korkeat. Nämä kertovat helposta kokeesta. Syksyllä 2008 tehtävien jakautuminen eri vaikeus tasoille oli suhteellisen tasaista, kuitenkin keskitason tehtävät hieman painoutuivat. A:n raja hieman

korkea (10p) ja E: raja keskitasoa. Syventävistä kursseista ei ollut yhtään kokonaista tehtävää, ainoastaan kolmasosa tehtävä kurssista 11. Keväinä 2009 ja 2010 kaikkia tehtäväryhmiä oli tyyppillinen määrä. Vaikka syventäviä tehtäviä oli 4, arvosanapisterajat olivat keskitasoiset.

Syksyllä 2009 Keskitason tehtävät ja hieman myös helpot painottuivat ja vaikeita oli vain 7%. Myös syventävien kurssien tehtäviä oli vain 1. E:n raja oli korkea (47 pistettä) ja A:n raja keskitasoa. Koe on ollut suhteellisen helppo osaaville oppilaille. A:n raja ei ole noussut, vaikka helpoksi luokiteltuja tehtäviä kokeessa on. Syksyllä 2010 tehtävien jakautuminen vaikeustasoille oli tasaista, keskitason tehtävät kuitenkin hieman painottuivat. Syventävien kurssien tehtäviä oli vain 1. A:n raja oli syksyn kokeista matalin (7 p) ja E:n rajakin oli hieman matala (39 p). Keväällä 2011 helppoja tehtäviä oli 47 % ja vaikeita vain 7 %. Erityisesti arvosanan E raja oli erittäin korkea (51 pistettä).

Syksyllä 2011 tehtävät jakautuvat eri vaikeustasoille aika tasaisesti, mutta helppoja tehtäviä oli eniten ja vaikeita vähiten. A:n raja oli hieman korkea (10 p) ja E:n raja syksyn kokeista korkein (49 p). Arvosana pisterajojen korkeus johtunee helppojen ja keskitasoisien tehtävien määrästä. Kevään 2012 kokeessa kaikkia tehtäviä oli tasaisesti, vaikeita hieman tavallista enemmän, silti A:n raja oli korkeampi kuin koskaan (13 pistettä) ja E:nkin 50 pistettä. Koe oli siis tehtävistä huolimatta hyvin helppo. Syksyllä 2012 tehtävät jakautuivat eri vaikeustasoille aika tasaisesti, mutta keskitason tehtäviä oli eniten ja vaikeita vähiten. Syventävien kurssien tehtäviä oli vain 1. A: raja oli keskitasoa ja E: raja korkea, 47 pistettä. Keväällä 2013 helppoja tehtävä oli 40 % kaikista tehtävistä. Syventävien kurssien tehtäviä oli 3 ja arvosanarajat olivat keskitasoisia.

Syksyllä 2013 Keskitason tehtävät selvästi painottuivat (73%) ja vaikeita tehtäviä oli vain 7%. Syventävien kurssien tehtäviä oli kuitenkin syksyn kokeista eniten eli 3 tehtävää. A:n raja oli syksyn kokeista matalin (7 pistettä) ja E:n raja korkea, 47 pistettä. Keväällä 2014 Keskitason tehtäviä oli 60 %. Syventävien kurssien tehtäviä oli vain yksi. E:n raja oli tavallisella tasolla, mutta A:n raja oli erittäin korkea (13 pistettä). Syksyllä 2014 Keskitason tehtävät painottuivat ja helppoja oli vähiten. A:n ja E:n rajat olivat keskitasoa. Keväällä 2015 vaikeita tehtäviä oli 23 % ja syventävien kurssien tehtäviä oli 3. E:n raja oli keskitasolla, mutta A:n raja oli ennätyskellisen matala, mikä kertoo kokeen vaikeudesta.

Syksyllä 2015 keskitason tehtävät painottuivat (60%) ja helppoja sekä vaikeita tehtäviä oli yhtä paljon. A:n raja oli syksyn kokeista matalin (7 p) ja E:n raja hieman matala (39 pistettä). Keväällä 2016 Vaikeita tehtäviä oli 8 % ja keskitason tehtäviä 62 %. Vaikeiden tehtävien pienestä määrästä huolimatta sekä A:n että E:n rajat olivat ennätyskellisen matalat. Syksyllä 2016 keskitasoiset tehtävät painottuivat ja helppoja tehtäviä oli vähiten. A:n ja E:n rajat olivat molemmat keskitasoa. Keväällä 2017 vaikeita tehtäviä oli melko paljon (23 %) ja syventäviä tehtäviä 4. Arvosanapisterajat olivat myös tässä kokeessa erittäin matalat. Syksyllä 2017 Tehtävien jakautuminen eri vaikeustasoille suhteellisen tasaista, kuitenkin keskitason tehtävät painottuvat. Helppoja tehtäviä on vähiten. Syventävien kurssien tehtäviä vain 1. A:n raja on keskitasoa ja E:n raja hieman matala (39p).

Keväällä E:n raja on ollut korkea (yli 50 pistettä) kolme kertaa. Kahdella kerralla helppoja tehtäviä on ollut paljon (yli 35 %), mutta niistä toisella kerralla myös vaikeita tehtäviä oli paljon (27 %). Kolmannella kerralla tehtävät olivat jakautuneet erittäin tasaisesti. Kevään kokeissa E:n raja on ollut matala (35 ja 39 pistettä) kaksi kertaa. Kun raja oli 35 pistettä, vaikeita tehtäviä oli todella vähän (8%) ja keskitason tehtävät painottuivat. Toisella kerralla tehtävät jakautuivat tasaisesti, mutta syventävien kurssien tehtäviä oli 4, mikä on todella paljon.

Syksyn kokeissa E:n raja on ollut korkea (47-49 pistettä) neljä kertaa. Kolme kertaa helppoja tehtäviä on ollut yli 35%. Kaksi kertaa vaikeita tehtäviä on ollut vähän (7%) ja muulloin 20%, mutta toisella kerralla näistä helppojakin oli vähän ja syventävistä kursseista oli 3 tehtävää, kun taas toisella kerralla helppoja tehtäviä oli aika paljon (38%). Syksyn kokeissa E:n raja on ollut matala (37-39 pistettä) neljä kertaa. Yhden kerran tehtävät jakautuivat tasaisesti ja helppoja tehtäviä oli vähiten. Muulloin vaikeita tehtäviä on ollut vähiten, 7-20% ja keskitason tehtävät painottuivat.

A:n raja on keväällä ollut matala (9 pistettä) kolme kertaa. Nämä kolme ovat peräkkäiset kokeet keväältä 2015-2017. Kevään 2016 kokeessa vaikeita tehtäviä oli hyvin vähän (8 %) ja keskitasoisia erittäin paljon, mutta siitä huolimatta sekä A:n että E:n rajat olivat ennätysellisen matalat (9 ja 35 pistettä). Keväiden 2015 ja 2017 kokeissa oli melko paljon vaikeita tehtäviä (23 %) ja lisäksi tavallista enemmän valtakunnallisten syventävien kurssien tehtäviä. Kevään kokeissa A:n raja on ollut 13-14 pistettä eli korkea kolme kertaa. Tehtävät jakautuivat eri vaikeustasoille yhden kerran tasaisesti, mutta tällöin syventävien kurssien tehtäviä oli 3, mikä on aika paljon. Muulloin keskitason tehtävät painottuivat, joista toisella kerralla helppoja ja vaikeita tehtäviä oli yhtä paljon ja toisella kerralla helppoja oli hieman enemmän.

Syksyn kokeissa A:n raja on ollut matala (7 pistettä) kolme kertaa. Jokaisessa kokeessa keskitason tehtävät ovat painottuneet. Yhden kerran vaikeita on ollut todella vähän (7%) ja kaksi kertaa melko paljon (20%). Syksyn kokeissa A:n raja on ollut korkea (10-13 pistettä) kolme kertaa, jolloin vaikeita tehtäviä on ollut joka kerta 20%. Helppojen tehtävien osuus on vaihdellut 20-42%.

Syksyn ja kevään kokeiden tehtävien jakautumisesta eri vaikeustasoille ei voida tehdä selkeää johtopäätöstä, miten se vaikuttaa A:n ja E:n pisterajoihin. Sillä helppojen tai vaikeiden tehtävien määrän ollessa suuri tai pieni, pisterajojen asettuminen korkealle tai matalalle vaihtelee jokaisessa tapauksessa vähän eri tavalla.

Arvosanapisterajoja tarkastelemalla voidaan tehdä kuitenkin joitakin päätelmiä. Työssä tarkastellut, A: ja E:n, pisterajat vaihtelevat syksyisin ja keväisin. Syksyisin pisterajat ovat keskimäärin matalampia kuin keväisin, erityisesti A:n pisterajat. A:n raja oli alimmillaan syksyinä 2010, 2013 ja 2015 (7 pistettä). E:n rajoissa on enemmän vaihtelua ja alin E:n raja on ollut keväällä 2016 (35 pistettä.). Syksyjen kokeissa E:n raja vuorottelee lähes vuosittain matalasta korkeaan. Keväiden kokeissa on huomattavissa E:n rajoissa laskeva trendi. Keväinä 2015-2017 A:n ja E:n rajat ovat olleet matalammat kuin ennen. Pisterajojen laskuun voivat vaikuttaa uuden rakenteen mukaiset kokeet, joissa maksimipistemäärä on 6 pistettä alempi jokeritehtävien poistamisen vuoksi. Keväästä 2015 eteenpäin koe on muuttunut vähän jokaiselle koekerralle. Ilmeisesti Ylioppilastutkintolautakunta on koittanut löytää optimaalista rakennetta kokeelle ja testannut erilaisia vaihtoehtoja. Tämä on voinut vaikuttaa kokelaiden suorituksiin, kun koetilanne ja sen rakenne ei ole ollut niin hyvin ennustettavissa edellisten vuosien perusteella.

5. Johtopäätökset

5.1 Aineiston jaottelu kursseittain

Derivaatta-kurssin tehtävät painottuvat selkeästi eniten. Näin on myös opetus suunnitelman 2015 mukaisissa kokeissa. Seuraavaksi eniten on kaikkien kokeiden tarkastelun mukaan Geometria ja Integraalilaskenta kursseilta. Geometria-kurssin tehtäviä on selkeästi vähemmän

vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisissa kokeissa. Vähiten tehtäviä on valtakunnallisista syventävistä kursseista. Pakollisista kursseista vähiten on Funktiot ja yhtälöt -kurssista, jonka sisältö on uudempaan opetussuunnitelmaan muuttunut paljon. Vertailua on siten vaikea tehdä uudemman ja vanhemman opetussuunnitelman mukaisien kokeiden välillä. Todetaan kuitenkin, että ensimmäisen kurssin mukaisia tehtäviä on molemmissa tapauksissa suhteellisen vähän.

5.2 Aineiston vertailu opetussuunnitelmiin

Pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävät noudattavat lähes täydellisesti sen hetkessä Lukion opetussuunnitelman perusteissa listattuja kurssien tärkeitä sisältöjä. Ylioppilaskokeissa kysytään välillä asioita, jotka on määritelty peruskoulun opetussuunnitelmaan, mutta jotka eivät kuulu mihinkään lukion kurssiin. Tämä on ymmärrettävää, sillä peruskoulun asiat oletetaan olevan hallussa lukiossakin. Yksittäisiä opetussuunnitelman ulkopuolelta kysytyjä asioita olivat muun muassa projektio ja jotkin integraalien sovellukset. Useimmat opetussuunnitelman ylittävät tehtävät ovat olleet jokeritehtäviä, joiden tarkoituskin on olla haastavampia ja työläämpiä.

5.3 Bloomin taksonomian mukainen jaottelu

Tehtävissä eniten painottuvat Bloomin taksonomian keskitasoiset tehtävät eli soveltaa- ja analysoi-luokkien tehtävät. Yli puolet kokeiden tehtävistä kuuluu jompaankumpaan näistä luokista. Muutamissa kokeissa on ollut paljon ymmärtää-luokan tehtäviä, mutta yleensä niitä on kaksi tai kolme. Pelkkiä muistamistehtäviä on usein vain kokeen alkupään tehtävien osana. Vaikeista tehtävistä enemmän on analysointi- kuin luomistehtäviä. Jokaisessa kokeessa on ollut ainakin yksi jompaankumpaan näistä kuuluvat tehtävä, mutta ei aina molempia. Melkein kaikki kokeiden jokeritehtävät ovat vaatineet analysoinnin tai luomisen tasoa.

Kuten ylioppilastutkintolautakunnan omat määräyksetkin kertovat, kokeet rakentuvat pääosin siten, että alkupäässä on helpompia ja loppupäässä vaikeampia tehtäviä.

Kevään 2016 kokeesta eteenpäin kokeen A-osassa (tehtävät 1-4) laskimen käyttö ei ole ollut sallittua. Tämä ei kuitenkaan näy tehtävien haastavuudessa. Uuden rakanteen mukaisissa kokeissa luomistehtäviä on ollut erittäin vähän ja niiden tilalta enemmän arvioimistehtäviä. Uuden rakanteen mukaisissa kokeissa joku alkupään tehtävistä on ollut monivalintatehtävä, ”järjestä välivaiheet”- tai ”yhdistä parit” -tyyppinen tehtävä, joiden kaltaisia tehtäviä olisi helppo toteuttaa myös sähköisinä ylioppilaskoetehtävinä. Näissä tehtävissä ei vaadita mitään perustelua, ainoastaan vastausrivi, joten tämän kaltaisia tehtäviä olisi helppo toteuttaa myös sähköisinä ylioppilaskoetehtävinä, sillä tietokoneohjelma osaa tarkistaa ne automaattisesti. Uudessa opetussuunnitelmassa painotetaan analysoinnin taitoja ja huomiota halutaan matematiikassa siirtää pois mekaanisesta laskemisesta. Tämäkin näkyy uusina tehtävätyypeinä. Tehtävissä on esimerkiksi pyydetty analysoimaan valmiita tehtävän ratkaisuja ja korjaamaan niistä virheet sen sijaan, että olisi pyydetty ratkaisemaan tehtävä.

5.4 Keväiden ja syksyjen kokeiden vertailu

Suurin ero kevään ja syksyn kokeiden välillä on valtakunnallisten syventävien kurssien määrä. Kevään kokeissa näitä on keskimääräisesti enemmän kuin syksyn kokeissa. Toinen havaittu ero kurssittaisessa tarkastelussa on se, että kevään kokeissa painottuvat hieman

Trigonometriset funktiot -kurssin tehtävät ja Juuri ja logaritmfunktiot -kurssilta on vähän tehtäviä. Näitä huomiota ei voi tehdä syksyn kokeista.

Yhtäläisyyksiä kevään ja syksyn kokeista löytyy. Sillä kaikkien kokeiden tarkastelun tuloksien tavoin sekä syksyn että kevään kokeissa eniten tehtäviä on Derivaatta, Geometria ja Integraalilaskenta -kursseilta. Myöskään kurssit, joista on vähiten tehtäviä, eivät poikkea syksyn ja kevään keskinäisissä vertailuissa. Vähiten tehtäviä syksyn ja kevään kokeissa on kaikkien kokeiden tavoin kursseilta Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä sekä Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.

Kevään ja syksyn kokeiden välillä ei ole eroja tehtävien jakautumisessa Bloomin taksonomian tasolle. Myös tehtävien määrät kullakin tasolla ovat samaa luokkaa. Eniten on soveltamis- ja analysoimistehtäviä ja vähiten on luomistehtäviä.

5.5 Kokeiden vertailu arvosanapisterajoihin

Sekä kevään, että syksyjen kokeissa joinakin vuosina arvosanarajojen perusteella päätelty kokeen vaikeusaste on vastannut tehtävien vaikeusjakamaa. Toisina vuosina taas helpoiksi luokitelluista tehtävistä huolimatta koe on ollut pisterajojen perusteella vaikea. Tehtävien näennäisen vaikeuden ja korkeamman tiedon tason vaatimuksen perusteella ei siis voida varmasti arvioida sitä, onko koe kokelaille vaikea. Kokeiden rakenne helppojen, keskitasoisten ja vaikeiden tehtävien välillä vaihtelee vuodesta toiseen erittäin paljon. Todennäköisesti suuri vaikutus kokeen koettuun vaikeuteen on sillä, mistä aiheista “vaikeat” ja mistä “helpot” tehtävät ovat. Jokainen ihminen kuitenkin kokee erilaiset tehtävät helpoiksi ja vaikeiksi, joten täysin pätevää luokittelua on mahdotonta tehdä.

Vuosina 2006-2017 arvosanan A pisteraja on ollut jokaisena vuonna alhaisempi syksyllä, kuin keväällä. E:n raja on ollut syksyynä 2009 sekä 2016 korkeampi kuin saman vuoden keväänä, muulloin kevään arvosanaraja on ollut korkeampi, lukuun ottamatta vuotta 2017, jolloin molemmissa kokeissa E:n raja oli 39 pistettä. Neljän viimeisimmän kokeen arvosanarajat ovat olleet hyvin matalia. Pisterajojen laskuun voivat vaikuttaa uuden rakenteen mukaiset kokeet, joissa maksimipistemäärä on 6 pistettä alempi jokeritehtävien poistamisen vuoksi. Myös kokeen rakenneuudistus on voinut vaikeuttaa koetta, kun A-osassa ei saa käyttää laskinta ratkaisemisen apuna. Keväästä 2015 eteenpäin koe on muuttunut vähän jokaiselle koekerralle. Ilmeisesti Ylioppilastutkintolautakunta on koittanut löytää optimaalista rakennetta kokeelle ja testannut erilaisia vaihtoehtoja. Tämä on voinut vaikuttaa kokelaiden suorituksiin, kun koetilanne ja sen rakenne ei ole ollut niin hyvin ennustettavissa edellisten vuosien perusteella.

Lähteet

Anderson, L. W. (1999). Rethinking Bloom's Taxonomy: Implications for Testing and Assessment. University of South Carolina, Columbia, SC USA.

Common Core State Standards for Mathematics, USA

Krathwohl, D. R. (2002). A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. *Theory into practice Volume 41, Number 4, Autumn 2002*. College of Education, The Ohio State University.

Lukiolaki 10§ (13.6.2003/478)

Lukiolaki 18§ (13.8.2004/766)

Matematiikan kokeen määräykset (2017). Ylioppilastutkintolautakunta.

Matematiikan ylioppilastehtävät (2005-2017).

<https://matta.hut.fi/matta/yoteht/index.html>

Opetushallitus (2003). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Määräys 33/011/2003. Vammalan kirjapaino Oy, Vammala.

Opetushallitus (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. Määräys 60/011/2015. Next Print Oy, Helsinki.

Owen Wilson, L. (2016). Anderson and Krathwohl - Understanding the New Version of Bloom's Taxonomy. *ED 721 (2001) course handbook*.

Valtioneuvoston asetus ylioppilastutkinnosta 3§ (17.11.2005/915)

Ylioppilaskokeiden pisterajat (2005-2017). Ylioppilastutkintolautakunta.

<https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/pisterajat/>