

Ylioppilaskokelaiden yleisimmät virheet jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvissä ylioppilaskirjoitusten tehtävissä

Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma
Maisterintutkielma

Laatija:
Jasmin Palomäki

Ohjaaja:
Yliopistotutkija Matti Pauna

Syyskuu 2024
Helsinki

Tiedekunta: Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

Koulutusohjelma: Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma

Opintosuunta: Matematiikan opettaja

Tekijä: Jasmin Palomäki

Työn nimi: Ylioppilaskokelaiden yleisimmät virheet jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvissä tehtävissä

Työn laji: Maisterintutkielma

Kuukausi ja vuosi: syyskuu 2024

Sivumäärä: 88

Avainsanat: jatkuvuus, derivoituvuus, virhe, virhekäsitys, lukio, matematiikan ylioppilaskoe

Ohjaaja tai ohjaajat: Matti Pauna

Säilytyspaikka: E-thesis

Tiivistelmä:

Tässä tutkimuksessa tutkitaan pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa vuosina 2020–2022 esiintyneisiin tehtäviin tehtyjä kokelasratkaisuja. Analysoitavat tehtävät liittyvät funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen. Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, millaisia virheitä ja virhekäsityksiä funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvissä tehtävissä ilmenee. Lisäksi pohditaan, miten opetusta voisi muuttaa, jotta kyseisiä virheitä ja virhekäsityksiä voitaisiin ehkäistä. Aikaisemmissa tutkimuksissa on havaittu monia funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä, ja kyseiset käsitteet ovat keskeisiä matemaattisessa analyysissä. Näiden seikkojen vuoksi erityisesti matematiikan opettajien täytyisi olla tietoisia käsitteisiin liittyvistä virhekäsityksistä, ja tällä tutkimuksella halutaan tukea opettajien pyrkimystä laadukkaampaan ja virhekäsityksiä ehkäisevään opetukseen.

Aineisto kerättiin analysoimalla kolmeen funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvään pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa esiintyneeseen tehtävään tulleita kokelasratkaisuja. Kuhunkin tehtävään oli 100 analysoitavaa kokelasratkaisua. Analyysissä etsittiin ratkaisuisissa esiintyneet virheet tehtäväkohtaisesti ja luokiteltiin ne, minkä jälkeen koottiin tulokset yhteen ja etsittiin yleisimmät ratkaisuisissa esiintyneet virheet.

Yleisimmät funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvissä tehtävissä tehdyt virheet liittyivät jatkuvuuden ja derivoituvuuden määritelmien puutteelliseen osaamiseen. Jatkuvuutta tai derivoituvuutta ei esimerkiksi huomattu perustella mahdollisen epäjatkuvuus- tai epäderivoituvuuskohdan ulkopuolella, ja jatkuvuuteen tai derivoituvuuteen

tiettyssä kohdassa ajateltiin riittävän se, että funktiolla on raja-arvo kyseisessä kohdassa. Lisäksi oli yleistä ajatella funktion jatkuvuudesta seuraavan automaattisesti funktion derivoituvuuden. Myös tehtävänannon puutteellinen noudattaminen oli yleistä.

Tutkimuksen perusteella voidaan päätellä, että ylioppilaskokelailla oli paljon funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä, jotka aiheuttivat virheitä ratkaisuisissa. Myös puutteellinen tehtävänannon noudattaminen aiheutti paljon virheitä. Tuloksia voidaan hyödyntää opetuksessa erityisesti lukiossa ja yliopistossa. Matematiikan opettajat saavat tämän tutkimuksen myötä käsityksen siitä, millaisia virheitä jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvissä tehtävissä tehdään ja millaisia virhekäsityksiä kyseisiin käsitteisiin liittyen ihmisillä on. Jatkotutkimusaiheena voisi olla jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvissä tehtävissä ilmenevien virheiden ja virhekäsitysten syiden tarkempi ja syvempi analysointi, mikä ei tämän tutkimuksen puitteissa ollut mahdollista.

Sisällysluettelo

1	Johdanto	1
2	Teoreettinen viitekehys	2
2.1	Matematiikka tieteenä	2
2.2	Matemaattisen tiedon oppimisesta ja käsitteiden ymmärtämisestä	2
2.2.1	Käsitekuva	3
2.2.2	Matematiikan kolme maailmaa	4
2.3	Määritelmät	8
2.3.1	Itseisarvo	8
2.3.2	Funktion jatkuvuus	10
2.3.3	Funktion derivoituvuus	18
2.4	Funktion jatkuvuus ja derivoituvuus lukion opetussuunnitelmassa	24
2.5	Virhe ja virhekäsitys	28
2.6	Funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä	29
2.6.1	Funktion jatkuvuuteen liittyvät virhekäsitykset	30
2.6.2	Funktion derivoituvuuteen liittyvät virhekäsitykset	32
2.6.3	Funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden väliseen yhteyteen liittyvät virhekäsitykset	32
2.6.4	Muita differentiaali- ja integraalilaskennan tehtävien ratkaisussa havaittuja virheitä ja virhekäsityksiä	34
3	Tutkimuksen metodit	36
3.1	Tutkimuskysymykset ja aineisto	36
3.2	Analyysimenetelmästä ja sen valinnasta	37
3.3	Kuvaus analyysistä	39
3.4	Tehtävänannot ja ratkaisut	40
3.4.1	Pitkä matematiikka, syksy 2020, tehtävä 10. Väitteitä	40
3.4.2	Pitkä matematiikka, kevät 2021, tehtävä 9. Paloittain määritelty funktio	45
3.4.3	Pitkä matematiikka, kevät 2022, tehtävä 8. Jatkuva mutta ei derivoituva funktio	49
4	Tulokset	52
4.1	Tulokset tehtäväkohtaisesti	52
4.1.1	Pitkä matematiikka, syksy 2020, tehtävä 10. Väitteitä	52
4.1.2	Pitkä matematiikka, kevät 2021, tehtävä 9. Paloittain määritelty funktio	58
4.1.3	Pitkä matematiikka, kevät 2022, tehtävä 8. Jatkuva mutta ei derivoituva funktio	62
4.2	Tulosten yhteenveto	68

4.2.1	Funktion jatkuvuuteen liittyvät virheet	68
4.2.2	Funktion derivoituvuuteen liittyvät virheet	72
4.2.3	Erotusosamäärän laskemiseen liittyvät virheet	76
4.2.4	Raja-arvoihin liittyvät virheet	77
4.2.5	Muut virheet	78
4.2.6	Yhteenveto	80
5	Luotettavuus	82
6	Pohdinta	85
	Lähteet	89

1 Johdanto

Funktion jatkuvuus ja derivoituvuus ovat keskeisiä matemaattisen analyysin käsitteitä. Kuitenkin aikaisempien tutkimusten perusteella funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyy monia virhekäsityksiä niin lukiolaisilla kuin matematiikan opettajaksi opiskelevillakin (esim. Duru ym., 2010; Tall & Vinner, 1981; Viholainen, 2006). Virhekäsitykset tuottavat virheellisiä ratkaisuja tehtäviin, mutta ne voivat myös jäädä piiloon (Luneta & Makonye, 2010), joten opettajien olisi hyvä tiedostaa, millaisia virhekäsityksiä näihin käsitteisiin liittyy.

Tutkimus tästä aiheesta on tärkeää, koska kyseiset käsitteet ovat keskeisiä matematiikan alalla. Esimerkiksi Helsingin yliopiston matematiikan perusopintoihin kuuluu funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkimista (Helsingin yliopisto, 2024) eli käsitteet esiintyvät jo opintojen alussa. Lisäksi lukion vuoden 2019 opetussuunnitelman mukaisesti pitkän matematiikan 12 moduulista kahdessa (MAA6 ja MAA12) käsitellään funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta (Opetushallitus, 2019). Lisäksi matemaattisen analyysin käsitteitä, kuten jatkuvuutta ja derivoituvuutta, käytetään moniin sovelluksiin esimerkiksi fysiikassa (esim. Rassias & Tóth, 2014). Näiden käsitteiden osaamista on siis hyvä mitata.

Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, millaisia virheitä ja virhekäsityksiä funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvien tehtävien ratkaisuisissa ilmenee. Tutkimuksessa analysoidaan kolmen vuosina 2020–2022 esiintyneen funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvän pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten tehtävän kokelasratkaisuja. Tutkimuskohteena on siis erityisesti lukioikäisten tekemät virheet. Tutkimustuloksia voi hyödyntää matematiikan opetuksessa niin lukiossa kuin yliopistossakin. Toisaalta tutkimustuloksia voi käyttää myös oman oppimisensa tukemiseen ja omien virhekäsitysten hahmottamiseen.

Tutkimuksen luvussa 2 tutustutaan matematiikkaan tieteenä, jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviin määritelmiin ja lauseisiin sekä aikaisemmissa tutkimuksissa havaittuihin virheisiin ja virhekäsityksiin. Luvussa 3 taas esitellään tutkimuksen metodit. Luvussa 4 esitetään tutkimustulokset sekä luokitellaan tuloksia. Tulokset esitetään sekä tehtäväkohtaisesti että yhteenvedona kaikista tehtävistä. Tutkimuksen luotettavuutta pohditaan luvussa 5, ja luvussa 6 pohditaan muun muassa jatkotutkimusaiheita sekä sitä, miten virhekäsityksiä saataisiin vähennettyä.

2 Teoreettinen viitekehys

Tässä luvussa esitellään tämän tutkimuksen teoreettinen viitekehys eli tutustutaan matematiikkaan tieteenä, pohditaan matemaattisen tiedon oppimista ja käsitteiden ymmärtämistä, esitellään jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvät määritelmät ja lauseet, käydään läpi luvun opetussuunnitelma jatkuvuuden ja derivoituvuuden osalta, tutustutaan virheen ja virhe-käsityksen väliseen eroon sekä esitellään aikaisemmissa tutkimuksissa havaittuja funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virheitä ja virhekäsityksiä.

2.1 Matematiikka tieteenä

Matematiikka on deduktiivinen tieteenala, jossa uusia tuloksia päätellään aikaisempien tulosten pohjalta. Kaiken perustana ovat *aksioomat*, jotka on sovittu aina paikkansa pitäviksi väittämiksi. (Saarimäki, 2007) Esimerkiksi yksi reaalilukujen kunta-aksioomista on kommutatiivisuuden aksiooma:

$x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ (Harjulehto ym., 2023, s. 15).

Aksioomista voidaan johtaa *teoreemoja* eli *lauseita*, joita voidaan toisaalta johtaa myös aikaisemmin todistetuista lauseista (Saarimäki, 2007). Lause on totta oleva väittämä, joka voidaan osoittaa todeksi todistuksen avulla. *Todistus* on kirjoitettu osoitus siitä, että lause on tosi.

Määritelmiä taas tarvitaan määrittämään tarkasti matemaattisen sanan tai ilmauksen merkitys. (Hammack, 2018, s. 113.)

Matematiikalla on hierarkkinen rakenne, koska lauseet perustuvat aina aksioomille tai aikaisemmille lauseille. Sen vuoksi myös matemaattisen käsitteen ymmärtämiseen vaaditaan usein usean muun käsitteen ymmärtämistä. (Saarimäki, 2007.) Tämä muodostaakin matematiikan opetukselle raamit, sillä esimerkiksi funktion derivoituvuutta ei voi ymmärtää esimerkiksi ennen funktion, funktion arvon ja raja-arvon sekä funktion derivaatan käsitteiden ymmärtämistä.

2.2 Matemaattisen tiedon oppimisesta ja käsitteiden ymmärtämisestä

Tässä kappaleessa tutustutaan käsitekuvan käsitteeseen sekä Tallin kehittämään teoriaan matematiikan kolmesta maailmasta. Nämä ovat teorioita siitä, miten matematiikka on jäsentynyt

ja miten matemaattinen tieto kehittyy. Matemaattisen tiedon kehittymistä käsitteleviä teorioita on olemassa useita, mutta Tall on kehitellyt omaa teoriaansa useiden aikaisempien teorioiden pohjalta (esim. Piaget, 1972; Bruner, 1966; Fischbein, 1987), joten sen avulla saadaan hyvä kuva siitä, millaisia teorioita matemaattisen tiedon kehittymisestä on olemassa. Tarkoituksena ei ole syvemmin paneutua matematiikan oppimisen teorioihin, mutta kuitenkin esitellä yksi teorioista, jotta aiheesta saisi jonkinlaisen käsityksen. Tämä auttaa myös analyysia.

2.2.1 Käsitekuva

Usein esimerkiksi matematiikassa käsite nimetään tai sille annetaan symboli, ja sen avulla käsitettä voidaan käyttää. Käsitteen merkitys kuitenkin hahmottuu todellisuudessa vasta, kun käsitettä palautetaan mieleen ja sitä käsitellään mielessä. (Tall & Vinner, 1981.)

Käsitekuvan (concept image, suomennos peräisin Tossavaiselta ja Haukkaselta (2012)) käsitettä käytetään kuvaamaan koko kognitiivista rakennetta, joka liittyy käsitteeseen. Se siis tarkoittaa esimerkiksi käsitteeseen liitettyjä mielikuvia, ominaisuuksia ja prosesseja. Käsitekuva muuttuu kokemusten myötä, ja tietyn ärsykkeen voi sanoa saattavan aktivoida vain käsitekuvan tiettyä osaa. Näin ollen käsitekuva voi sisältää keskenään ristiriidassa olevia osia. Ainoastaan silloin, kun käsitekuvan keskenään ristiriidassa olevat osat aktivoidaan samanaikaisesti, voi yksilö havaita keskenään ristiriitaisten osien olemassaolon. (Tall & Vinner, 1981.)

Käsitteen määritelmä (concept definition) käytetään määrittämään tai täsmentämään käsite. *Käsitteen formaali määritelmä* (formal concept definition) eli matemaattisen yhteisön yleisesti hyväksymä määritelmä voi poiketa *käsitteen henkilökohtaisesti muodostetusta määritelmästä* (personal concept definition), jolla ihminen on selittänyt itselleen käsitteen merkityksen. (Tall & Vinner, 1981.)

Yksilön mielessä esimerkiksi jatkuvuuden käsitekuvaan voivat liittyä menetelmät, joilla funktion jatkuvuutta voidaan tutkia, ja ajatus funktiosta, jonka kuvaajan pystyisi piirtämään nostamatta kynää paperista. Jälkimmäinen voi olla yksilön muodostama jatkuvuuden henkilökohtaisesti muodostettu määritelmä, joka on joissain tilanteissa ristiriitainen jatkuvuuden formaalin määritelmän kanssa. Tämä taas voi aiheuttaa virheellisiä johtopäätöksiä funktion jatkuvuudesta esimerkiksi tilanteissa, joissa funktion kuvaaja ei ole yhtenäinen, mutta joka on

siitä huolimatta määrittelyjoukossaan jatkuva. Sopivan ja oikean käsitekuvan luominen voikin olla hankalaa, ja jos käsitekuva muotoutuu ristiriitaiseksi käsitteen formaalin määritelmän kanssa, voi se vaikeuttaa formaalin teorian kehitystä opiskelijan mielessä (Tall & Vinner, 1981). Tällöin voisi ajatella, että olisi hyvä pyrkiä siihen, ettei opiskelijalle ehtisi muodostua ristiriitaista käsitekuvaa formaalin määritelmän kanssa ennen formaalin määritelmän opettamista.

Pitäisikö opiskelijoille sitten opettaa ensin käsitteen formaali määritelmä, ja vasta sitten auttaa häntä kehittämään käsitekuvaa lisää, jotta käsitekuva ei muodostuisi ristiriitaiseksi formaalin käsitteen kanssa? Kysymykseen voi etsiä vastausta Tallin (2004) matematiikan kolmen maailman avulla.

2.2.2 Matematiikan kolme maailmaa

Tall (2004) on jakanut matematiikan kolmeen maailmaan, joita ovat havaintomaailma (embodied world), symbolimaailma (proceptual-symbolic world) ja formaalimaailma (formal-axiomatic world). Matematiikan maailmojen avulla voidaan kuvata yksilön matemaattisen tiedon kehittymistä koko eliniän aikana (Tall, 2004). Tallin matematiikan maailmojen suomen-nokset ovat peräisin Hähkiöniemeltä (2018).

Matematiikan kolmen maailman teorian taustalla on Piaget'n loogisen ajattelun kehityksen vaiheteoria (Tall, 2004). Vaikka Piaget'n loogisen ajattelun kehityksen teoria onkin monia kymmeniä vuosia vanha, sen piirteitä pidetään edelleen oleellisina älykkyyteen liittyvissä teorioissa (esim. Müller, Ten Eycke & Baker, 2015).

Piaget jakoi lapsen loogisen ajattelun kehittymisen seuraaviin vaiheisiin: sensomotorinen vaihe, esioperationaalinen vaihe, konkreettisten operaatioiden vaihe ja formaalien operaatioiden vaihe (esim. Piaget 1972; vaiheiden suomennos Seppälä, 2017). Sensomotorisessa vaiheessa lapsi alkaa muun muassa hahmottamaan syy-seuraussuhteita. Esioperationaalisessa vaiheessa lapsi alkaa esimerkiksi ymmärtämään sanojen symboloivan havaittavia asioita. Konkreettisten operaatioiden vaiheessa muun muassa lapsen alkaa olla helpompi hahmottaa abstrakteja asioita, mutta niiden ymmärtäminen pohjautuu edelleen konkreettisiin asioihin.

Formaalien operaatioiden vaiheessa lapsen ajattelu irtaantuu konkreettisista asioista. Tuolloin lapsen alkaa olla mahdollista esimerkiksi kuvitella formaaleja malleja ja tekemään symbolien avulla tehtäviä. (Piaget, 1972.)

Lisäksi Piaget (1985) on kehittänyt kolmiosaisen teorian käsitteiden muodostumisessa yksilön mielessä. Empiirinen abstraktio kuvaa sitä, kun lapsi ymmärtää objektien ominaisuuksia. Pseudoempiirinen abstraktio taas tarkoittaa sitä, kun ymmärretään objekteihin kohdistuvien toimintojen ominaisuuksia, ja reflektiivinen abstraktio sitä, kun näistä toiminnoista tulee ajattelun objekteja. (Piaget, 1985.)

Muun muassa Piaget'n teorioiden pohjalta Tall kehitti matematiikan kolme maailmaa, joista yksi on havainnoista kehittyvä *havaintomaailma*. Havaintoja tehdään sekä fyysisestä että mielen sisäisestä maailmasta. Henkilö pystyy esimerkiksi luomaan havaintojensa pohjalta mielikuvia asioista, joita ei pysty reaali maailmassa havaitsemaan. Esimerkiksi täydellisen suoraa viivaa pystyy kuvittelemaan, vaikkei ole koskaan sellaista todellisuudessa nähnyt. Geometria on hyvä esimerkki matematiikan alasta, jossa liikutaan havaintomaailmassa, sillä geometrisiä olioita pystyy havaitsemaan visuaalisessa muodossa. (Tall, 2004.) Myös funktion kuvaajan voi liittää matematiikan havaintomaailmaan.

Havaintomaailmassa todistaminen tapahtuu ajatuskokeiden kautta. Voidaan esimerkiksi osoittaa säännöllisillä monikulmioilla leikkimällä, ettei Platonin kappaleita ole viittä enempää. (Tall, 2013, 189.) Funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta taas voidaan lähestyä havaintomaailman välineillä esimerkiksi havainnoimalla jatkuvien ja derivoituvien, jatkuvien ja epäderivoituvien sekä epäjatkuvien funktioiden kuvaajia ja niiden ominaisuuksia.

Symbolimaailma koostuu symboleista, joita käytetään laskemiseen ja käsittelyyn. Symbolimaailman avulla voidaan vaivattomasti vaihdella matematiikkaan liittyvien toimintojen tekemisen ja käsitteiden ajattelun välillä. Esimerkiksi laskutoimitukset, kuten yhteen- ja vähennyslasku, kuuluvat symbolimaailmaan. Niissä symbolien avulla kuvataan lisäämisen ja vähentämisen käsitteitä. (Tall, 2004.)

Symbolimaailmassa todistaminen tapahtuu symbolien avulla (Tall, 2004). Todistaminen symbolimaailmassa voi olla geneeristä (generic proof), jolloin asian todistamiseen käytetään

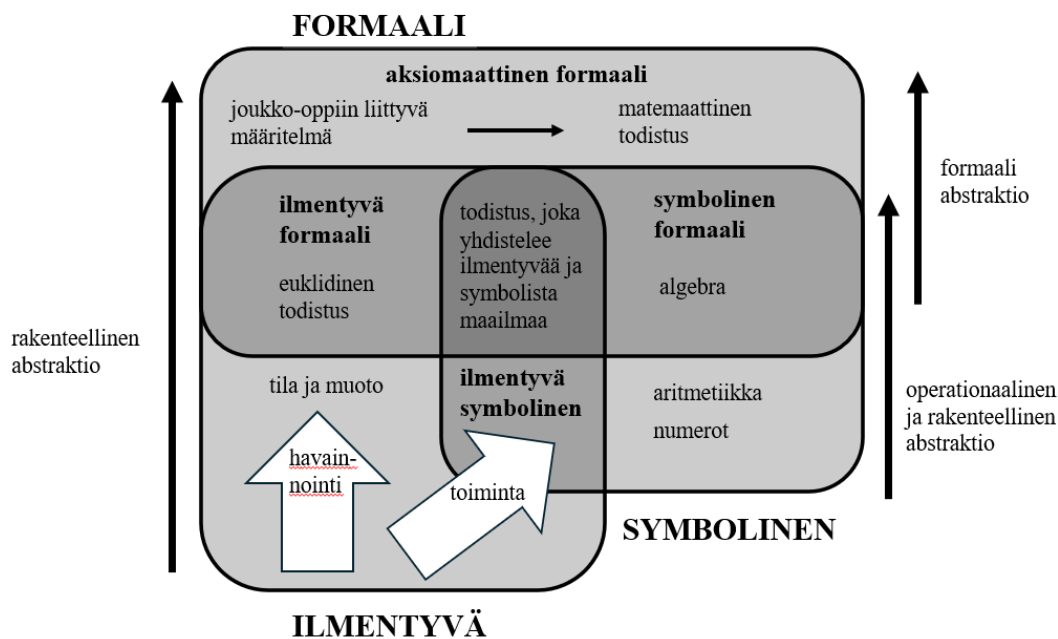
laskutoimituksia tietyillä luvuilla, tai algebrallista (algebraic proof), jolloin asian todistamiseen käytetään määritelmiä ja laskutoimituksia muuttujilla (Tall, 2013, 198). Symbolimaailman välineillä osoitetaan esimerkiksi funktion jatkuvuus tai derivoituvuus erilaisia raja-arvoja laskemalla.

Formaalimaailmassa esitetään ominaisuuksia formaalien määritelmien avulla. Formaaleita määritelmiä käytetään edelleen aksioomina, joiden avulla määritetään matemaattisia rakenteita, kuten ryhmä tai vektoriavaruus. Määritelmien avulla voidaan todistaa lauseita, joilla saa liitettyä matemaattisille rakenteille lisää ominaisuuksia. (Tall, 2004.)

Matematiikan maailmat voivat myös sekoittua tietyssä toiminnossa eli maailmat eivät ole toisistaan erillisiä. Näin ollen maailmojen sisään rakentuu vielä pienempiä ”maailmoja”, joissa on piirteitä useammasta maailmasta. Voidaan esimerkiksi nimittää havaintomaailman ja symbolimaailman piirteitä yhdistäviä toimintoja *ilmentyväksi symboliikaksi* (embodied symbolism), havaintomaailman ja formaalimaailman piirteitä ilmentäviä toimintoja *ilmentyväksi formalismiksi* (embodied formalism) sekä symbolimaailman ja formaalimaailman piirteitä sekoittavia toimintoja *symboliseksi formalismiksi* (symbolic formalism). (Tall, 2013, 16–20.) Esimerkkejä näistä useampaa maailmaa yhdistävistä toiminnoista on esitettynä kuvassa 1.

Tallin matematiikan maailmoissa keskeistä on ajatus maailmojen hierarkiasta. Havaintomaailman ja symbolimaailman käytännönläheisistä toiminnoista, kuten kuvioiden muodon havainnoinnista ja lukujen käytöstä, edetään kohti teoreettisempaa matematiikkaa, jossa on piirteitä sekä havaintomaailmasta, symbolimaailmasta että formaalimaailmasta. Ylimpänä hierarkiassa on pelkästään formaalimaailmaan liittyvien toimintojen taso. (Tall, 2013, 16–20.)

Tallin maailmojen hierarkia noudattaa siis samaa kaavaa kuin Piaget’n loogisen ajattelun kehityksen teoria: havainnoista siirrytään symbolien ymmärtämiseen ja siitä hiljalleen formaalimmalle tasolle, jossa ajattelu lopulta irtaantuu konkreettisista asioista. Kuvassa 1 on visuaalisesti kuvattuna matematiikan maailmojen hierarkia.



Kuva 1. Tallin matematiikan maailmojen hierarkia. Termit on suomennettu kuvaan. Alkuperäinen kuva on Tallin kirjasta *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics* (2013, 16–20).

Tall (2009) antaa esimerkkejä siitä, miten teoriaa matematiikan kolmesta maailmasta voi hyödyntää opetuksessa. Aluksi yhdistellään havaintomaailman ja symbolimaailman objekteja ja toimintoja, joiden myötä siirrytään luontevasti formaalimaailmaa kohti. Kun liikutaan havaintomaailmassa, havaitaan nopeasti, että tarvitaan symbolimaailman ja lopulta myös formaalimaailman objekteja ja toimintoja. Esimerkiksi jatkuvuuden määritelmää voidaan lähestyä laskeohjelmiston avulla jatkuvan funktion kuvaajaa zoomaamalla ja havaitsemalla, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, niin $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. (Tall, 2009.)

Tallin kolmen maailman teorian mukaan opetusta ei siis voi aloittaa formaaleista määritelmistä, vaan aluksi käsitettä tulisi lähestyä esimerkiksi visuaalisesti tai konkreettisia esimerkkejä antamalla. Vasta tämän jälkeen voidaan siirtyä abstraktimmalle tasolle ja lopulta formaaliin määritelmään. Käsitteen käsitekuvan muodostumisen kannalta käsitteeseen tutustuminen esimerkkien kautta voi olla haitallista, koska liian yksipuolisten esimerkkien myötä käsitekuvasta voi muodostua epäyhtenäinen ja ristiriitoja sisältävä. Opettajan tulisiikin kyetä tarjoamaan opiskelijoille tarpeeksi monipuolisia esimerkkejä käsitteeseen liittyen, jotta välttyttäisiin

virhekäsitysten syntymiseltä.

2.3 Määritelmät

Seuraavaksi käydään läpi funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvät keskeiset määritelmät ja niistä johdetut lauseet. Seuraavaksi esitettävät määritelmät ja lauseet ovat peräisin Harjulehdon ym. (2023) kirjasta. Koska funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvien lauseiden todistuksiin liittyy usein itseisarvojen käsittely, esitellään ensin itseisarvon määritelmä ja erilaisia itseisarvoihin liittyviä laskusääntöjä. Tämän jälkeen siirrytään funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviin määritelmiin ja tuloksiin.

2.3.1 Itseisarvo

Esitetään ensin reaalityön itseisarvon määritelmä, jota tarvitaan itseisarvoa koskevien lauseiden ja lemmojen todistuksiin. Tämän jälkeen osoitetaan, että kahden reaalityön tulon itseisarvo on yhtä suuri kuin kyseisten reaalityöjen itseisarvojen tulo. Sitten todistetaan lemma, jota tarvitaan itseisarvon sisällä olevan reaalityöjen summan suuruuden arviointia koskevan lauseen eli lauseen 4 todistamiseen. Lauseetta 4 tarvitaan myöhemmin raja-arvojen summaan liittyvän lauseen todistukseen.

Määritelmä 1. Reaalityön x itseisarvo on

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}.$$

Lause 2. Oletetaan, että $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin $|xy| = |x||y|$.

Todistus. Jos $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, niin määritelmän 1 nojalla $|x| = x$ ja $|y| = y$ eli $|x||y| = xy$. Lisäksi $xy \geq 0$ eli määritelmän 1 nojalla $|xy| = xy$. Siis $|xy| = |x||y|$.

Jos $x \geq 0$ ja $y < 0$, niin määritelmän 1 nojalla $|x| = x$ ja $|y| = -y$ eli $|x||y| = -xy$. Lisäksi $xy \leq 0$ eli määritelmän 1 nojalla $|xy| = -xy$. Siis $|xy| = |x||y|$.

Jos $x < 0$ ja $y \geq 0$, niin määritelmän 1 nojalla $|x| = -x$ ja $|y| = y$ eli $|x||y| = -xy$. Lisäksi $xy \leq 0$ eli määritelmän 1 nojalla $|xy| = -xy$. Siis $|xy| = |x||y|$.

Jos $x < 0$ ja $y < 0$, niin määritelmän 1 nojalla $|x| = -x$ ja $|y| = -y$ eli $|x||y| = xy$. Lisäksi $xy > 0$ eli määritelmän 1 nojalla $|xy| = xy$. Siis $|xy| = |x||y|$. $\square$

Lemma 3. Oletetaan, että $x, a \in \mathbb{R}$. Tällöin $|x| \leq a$, jos ja vain jos $-a \leq x \leq a$.

Todistus.

" $\Rightarrow$ ":

Osoitetaan ensin, että jos $|x| \leq a$, niin $-a \leq x \leq a$. Oletetaan, että $|x| \leq a$. Tällöin $-|x| \geq -a$. Määritelmän 1 nojalla $-|x| \leq x \leq |x|$ eli saadaan $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$. Täten siis $-a \leq x \leq a$.

" $\Leftarrow$ ":

Osoitetaan sitten, että jos $-a \leq x \leq a$, niin $|x| \leq a$. Oletetaan, että $-a \leq x \leq a$. Tällöin $a \geq 0$, koska jos $a < 0$, $-a > 0$, jolloin $a < 0 < -a$, mikä johtaa ristiriitaan oletuksen $-a \leq x \leq a$ kanssa.

Osoitetaan ensin, että jos $-a \leq x \leq a$ ja $x < 0$, niin $|x| \leq a$. Koska $-a \leq x \leq a$, niin $-a \leq x$ eli $a \geq -x$. Määritelmän 1 nojalla $-x = |x|$, kun $x < 0$, joten $a \geq -x = |x|$.

Osoitetaan sitten, että jos $-a \leq x \leq a$ ja $x \geq 0$, niin $|x| \leq a$. Koska $-a \leq x \leq a$, niin $x \leq a$. Määritelmän 1 nojalla $x = |x|$, kun $x \geq 0$, joten $|x| = x \leq a$.

Siis jos $-a \leq x \leq a$, niin $|x| \leq a$. $\square$

Lause 4. Kolmioepäyhtälö. Oletetaan, että $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

Todistus. Osoitetaan, että $|x + y| \leq |x| + |y|$. Määritelmän 1 nojalla $-|x| \leq x \leq |x|$ ja $-|y| \leq y \leq |y|$. Jos lasketaan epäyhtälöt puolittain yhteen, saadaan

$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Määritelmän 1 nojalla

$|x + y| = x + y$ tai $|x + y| = -(x + y)$. Täten kun $|x + y| = x + y$, epäyhtälöstä $x + y \leq |x| + |y|$ saadaan $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$, ja kun $|x + y| = -(x + y)$, epäyhtälöstä

$-(|x| + |y|) \leq x + y$ saadaan $|x| + |y| \geq -(x + y) = |x + y|$. Siis $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Osoitetaan sitten, että $||x| - |y|| \leq |x + y|$. Koska $|x + y| \leq |x| + |y|$, niin $|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|$ ja $|y| = |y + x - x| \leq |y + x| + |x|$ eli saadaan $|x| - |y| \leq |x + y|$ ja $|x| - |y| \geq -|y + x| = -|x + y|$. Tällöin $-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y|$, josta saadaan lemmän 3 nojalla $||x| - |y|| \leq |x + y|$. $\square$

Korollaari 5. Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

Todistus. Määritelmän 1 nojalla $|y| = |-y|$, joten lauseen 4 nojalla

$$||x| - |y|| = ||x| - |-y|| \leq |x + (-y)| = |x - y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|. \square$$

2.3.2 Funktion jatkuvuus

Ennen funktion jatkuvuuden määritelmää tutustutaan jatkuvuuden määritelmän kannalta tärkeään raja-arvon määritelmään ja siitä johdetaan erilaisia tuloksia esimerkiksi raja-arvojen laskusääntöihin liittyen.

Määritelmä 6. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$ siten, että

$(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r) \subset A$. Tällöin funktiolla f on *raja-arvo* $a \in \mathbb{R}$ pisteessä x_0 , jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon,$$

kun $0 < |x - x_0| < \delta$. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Esimerkiksi Augustin-Louis Cauchy, joka kehitti delta-epsilon-todistukset, määritteli lukujonon raja-arvon sanallisesti näin: "Kun saman muuttujan peräkkäin saamat arvot rajattomasti lähestyvät jotakin kiinteää arvoa, niin että ne lopulta poikkeavat siitä niin vähän kuin halutaan, tätä jälkimmäistä sanotaan edellisten raja-arvoksi." (Haapasalo, Hirvi & Huhtamäki, 1995.)

Seuraavaksi todistetaan muutamia raja-arvon laskemista helpottavia lauseita.

Lause 7. Oletetaan, että $c \in \mathbb{R}$. Tällöin $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

Todistus. Merkitään $f(x) = c$. Osoitetaan, että $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$.

Oletetaan, että $\varepsilon > 0$, jolloin $|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$ millä tahansa luvulla $\delta > 0$.

Siis $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$. $\square$

Lause 8. Oletetaan, että funktioille $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ pätee $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Tällöin $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$.

Todistus. Oletetaan, että $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, on olemassa sellaiset

$\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$, että $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, kun $0 < |x - x_0| < \delta_1$, ja $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, kun

$0 < |x - x_0| < \delta_2$. Merkitään $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ja oletetaan, että $0 < |x - x_0| < \delta$. Tällöin lauseen 4 nojalla

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (a + b)| &= |(f(x) - a) + (g(x) - b)| \\ &\leq |f(x) - a| + |g(x) - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$. $\square$

Lause 9. Oletetaan, että $c \in \mathbb{R}$ ja että funktiolle $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ pätee $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Tällöin

$\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = ca$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $c = 0$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$|cf(x) - ca| = |c(f(x) - a)| = |0 \cdot (f(x) - a)| = |0| = 0 < \varepsilon$, kun $0 < |x - x_0| < \delta$ eli

$\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = ca$.

Oletetaan sitten, että $c \neq 0$ ja $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, niin määritelmän 6 nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$, kun $0 < |x - x_0| < \delta$. Tällöin lauseen 2 nojalla

$$|cf(x) - ca| = |c(f(x) - a)| = |c||f(x) - a| < \frac{|c|\varepsilon}{|c|} = \varepsilon, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta. \text{ Siis}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = ca. \square$$

Lause 10. Oletetaan, että funktioille $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ pätee $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b. \text{ Tällöin } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab.$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - a)(g(x) - b)] = 0$. Koska $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b, \text{ niin lauseiden 7 ja 8 nojalla}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - a) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} a = a - a = 0 \text{ ja}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) - b) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} b = b - b = 0. \text{ Oletetaan, että } \varepsilon > 0, \text{ jolloin määritelmän 6}$$

nojalla on olemassa sellaiset δ_1 ja δ_2 , että

$$|(f(x) - a) - 0| < \sqrt{\varepsilon}, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \text{ ja } |(g(x) - b) - 0| < \sqrt{\varepsilon}, \text{ kun}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

Olkoot $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tällöin

$$|(f(x) - a)(g(x) - b) - 0| = |f(x) - a||g(x) - b| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ eli}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - a)(g(x) - b)] = 0.$$

Koska $(f(x) - a)(g(x) - b) = f(x)g(x) - f(x)b - ag(x) + ab$, niin $f(x)g(x) = (f(x) - a)(g(x) - b) + f(x)b + ag(x) - ab$. Nyt lauseiden 8 ja 9 nojalla

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - a)(g(x) - b) + f(x)b + ag(x) - ab] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - a)(g(x) - b)] + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)b + \lim_{x \rightarrow x_0} ag(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} ab \\ &= 0 + ab + ab - ab \\ &= ab. \square \end{aligned}$$

Lause 11. Oletetaan, että funktiolle $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ pätee $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, ja että $a \neq 0$. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}.$$

Todistus. Oletetaan, että $\varepsilon > 0$. Merkitään $\varepsilon_1 = \frac{|a|}{2}$ ja $\varepsilon_2 = \frac{a^2\varepsilon}{2}$. Koska $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, määritelmän 6 nojalla on olemassa sellaiset $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$, joilla $|f(x) - a| < \varepsilon_1$, kun $0 < |x - x_0| < \delta_1$, ja $|a - f(x)| < \varepsilon_2$, kun $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Olkoot $\delta > 0$, jolle pätee $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tällöin jos $0 < |x - x_0| < \delta$, niin $0 < |x - x_0| < \delta_1$ ja $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

Määritelmän 1 nojalla $-|x| \leq x \leq |x|$ eli $|f(x)| - |a| \leq ||f(x)| - |a||$ ja

$$|a| - |f(x)| \leq ||a| - |f(x)||.$$

Korollarin 5 nojalla siis

$$|f(x)| - |a| \leq ||f(x)| - |a|| \leq |f(x) - a| \text{ ja } |a| - |f(x)| \leq ||a| - |f(x)|| \leq |a - f(x)|. \text{ Tällöin}$$

$$||f(x)| - |a|| < \varepsilon_1 = \frac{|a|}{2}. \text{ Lemman 3 nojalla } -\frac{|a|}{2} < |f(x)| - |a| < \frac{|a|}{2}, \text{ jolloin}$$

$$\frac{|a|}{2} < |f(x)| < \frac{3|a|}{2}. \text{ Täten } \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|a|}. \text{ Tällöin edellä olevan ja lauseen 2 nojalla}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a} \right| &= \left| \frac{1}{a} \frac{1}{f(x)} (a - f(x)) \right| \\ &= \left| \frac{1}{a} \right| \left| \frac{1}{f(x)} \right| |a - f(x)| \\ &= \frac{1}{|a|} \frac{1}{|f(x)|} |a - f(x)| \\ &< \frac{1}{|a|} \frac{2}{|a|} \varepsilon_2 \\ &= \frac{2}{a^2} \frac{a^2 \varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{eli } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}. \square$$

Lause 12. Oletetaan, että funktioille $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ pätee $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Oletetaan lisäksi, että $b \neq 0$. Tällöin funktiolle $\frac{f}{g}: A \setminus \{x: g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ pätee

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Todistus. Koska $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, lauseen 11 nojalla $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$. Tällöin lauseen 10 nojalla

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \frac{1}{g(x)} = \frac{a}{b}. \square$$

Seuraavaksi määritellään vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo sekä todistetaan niihin liittyvä lause. Toispuoleisia raja-arvoja tarvitaan funktion jatkuvuuden tarkasteluun esimerkiksi paloittain määriteltyjen funktioiden tapauksessa sekä tilanteissa, joissa tutkitaan funktion toispuoleista jatkuvuutta.

Määritelmä 13. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$ siten, että $(x_0 - r, x_0) \subset A$. Tällöin funktiolla f on *vasemmanpuoleinen raja-arvo* a pisteessä x_0 , jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon,$$

kun $x \in A$ ja $x_0 - \delta < x < x_0$. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a.$$

Määritelmä 14. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$ siten, että $(x_0, x_0 + r) \subset A$. Tällöin funktiolla f on *oikeanpuoleinen raja-arvo* a pisteessä x_0 , jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon,$$

kun $x \in A$ ja $x_0 < x < x_0 + \delta$. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a.$$

Lause 15. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$ siten, että

$(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r) \subset A$. Tällöin $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, jos ja vain jos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Tällöin raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x) - a| < \varepsilon$, kun $0 < |x - x_0| < \delta$. Koska $|f(x) - a| < \varepsilon$ kaikilla

$0 < |x - x_0| < \delta$, niin kun $x - x_0 > 0$, $|x - x_0| = x - x_0$ eli $|f(x) - a| < \varepsilon$ pätee myös, kun $x_0 < x < x_0 + \delta$. Tällöin määritelmän 14 nojalla $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$. Lisäksi kun

$x - x_0 < 0$, $|x - x_0| = -(x - x_0) = x_0 - x$ eli $|f(x) - a| < \varepsilon$ pätee myös, kun $x_0 - \delta < x < x_0$. Tällöin määritelmän 13 nojalla $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$. Näin ollen $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$.

Oletetaan sitten, että $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$. Oletetaan, että $\varepsilon > 0$, jolloin on määritelmien 13 ja 14 nojalla olemassa sellaiset $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$, että $|f(x) - a| < \varepsilon$, kun $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ ja kun $x_0 < x < x_0 + \delta_2$. Jos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, niin $|f(x) - a| < \varepsilon$, kun $0 < |x - x_0| < \delta$. Näin ollen määritelmän 6 nojalla $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. $\square$

Raja-arvoa tarvitaan funktion jatkuvuuden osoittamiseen, sillä funktio on jatkuva pisteessä x_0 , jos sen arvo pisteessä x_0 on yhtä suuri kuin funktion raja-arvo kyseisessä pisteessä.

Määritelmä 16. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$ ja $r > 0$ siten, että $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$. Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, niin funktio f on *jatkuva pisteessä* x_0 . Toisin sanoen, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

kun $0 < |x - x_0| < \delta$, niin funktio f on jatkuva pisteessä x_0 .

Jatkuvuuden määritelmässä edellytetään, että funktiolla on raja-arvo pisteessä x_0 . Lisäksi raja-arvon on oltava reaaliluku. Jos siis funktion raja-arvo pisteessä x_0 on ∞ tai $-\infty$, raja-arvo ei ole reaaliluku, jolloin määritelmää 16 ei voida käyttää. (Harjulehto ym., 2023.)

Funktion jatkuvuutta voidaan tarkastella vain niissä funktion määrittelyjoukon pisteissä, joissa raja-arvon pystyy laskemaan. Koska esimerkiksi suljetun välin päätepisteissä pystyy laskemaan vain toispuoleisen raja-arvon, näissä pisteissä voidaan puhua ainoastaan funktion toispuoleisesta jatkuvuudesta. (Harjulehto ym., 2023.)

Määritetään seuraavaksi funktion vasemman- ja oikeanpuoleinen jatkuvuus sekä se, mitä tarkoitetaan, kun funktion sanotaan olevan jatkuva.

Määritelmä 17. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$ ja $r > 0$ siten, että $(x_0 - r, x_0] \subset A$. Jos $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, niin funktio f on *vasemmalta jatkuva* pisteessä x_0 .

Määritelmä 18. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ ja $r > 0$ siten, että $[x_0, x_0 + r) \subset A$. Jos $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, niin funktio f on *oikealta jatkuva* pisteessä x_0 .

Määritelmä 19. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Funktio f on jatkuva joukossa $B \subset A$, jos alla olevat ehdot toteutuvat:

- 1) Jos $x \in B$ ja $r > 0$ siten, että $(x - r, x + r) \subset B$, niin funktio f on jatkuva pisteessä x .
- 2) Jos $x \in B$ ja $r > 0$ siten, että $(x - r, x] \subset B$, niin funktio f on vasemmalta jatkuva pisteessä x .
- 3) Jos $x \in B$ ja $r > 0$ siten, että $[x, x + r) \subset B$, niin funktio f on oikealta jatkuva pisteessä x .

Sanotaan, että funktio f on jatkuva, jos se on jatkuva määrittelyjoukossaan A . (Harjulehto ym., 2023.)

Määritelmän 19 nojalla funktio on jatkuva avoimella välillä (a, b) , jos se on jokaisessa välillä olevassa pisteessä jatkuva. Toisaalta määritelmän 19 nojalla funktio on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva avoimella välillä (a, b) ja lisäksi pisteessä a oikealta jatkuva sekä pisteessä b vasemmalta jatkuva. (Harjulehto ym., 2023.) Lisäksi määritelmän 19 tärkeä huomio on se, että kun puhutaan funktion olevan jatkuva, tarkoitetaan sillä jatkuvuutta nimenomaan funktion määrittelyjoukossa eikä automaattisesti esimerkiksi reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$. Näin ollen ajatus siitä, ettei jatkuvan funktion kuvaajassa saisi olla hyppäyksiä, on harhaanjohtava.

Seuraavaksi osoitetaan, että tarkastelukohdassa jatkuvien funktioiden summat, tulot ja osamäärät ovat jatkuvia kyseisessä kohdassa. Lisäksi osoitetaan, että potenssifunktiot ja polynomifunktiot ovat jatkuvia. Näiden tulosten avulla voidaan helposti kuitata kaikki käsiteltävät potenssi- ja polynomifunktiot jatkuviksi.

Lause 20. Olkoot $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvia kohdassa x_0 . Tällöin $f + g$ on jatkuva kohdassa x_0 .

Todistus. Koska funktiot f ja g ovat jatkuvia kohdassa x_0 , niille pätee määritelmän 16 nojalla

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ ja } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0). \text{ Tällöin lauseen 8 nojalla}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$. Siis funktio $f + g$ on jatkuva kohdassa x_0 . $\square$

Lause 21. Olkoot $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvia kohdassa x_0 . Tällöin fg on jatkuva kohdassa x_0 .

Todistus. Koska funktiot f ja g ovat jatkuvia kohdassa x_0 , niille pätee määritelmän 16 nojalla $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. Tällöin lauseen 10 nojalla $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = f(x_0)g(x_0)$. Siis funktio fg on jatkuva kohdassa x_0 . $\square$

Lause 22. Olkoot $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvia kohdassa x_0 , ja $g(x) \neq 0$. Tällöin $\frac{f}{g}$ on jatkuva kohdassa x_0 .

Todistus. Koska funktiot f ja g ovat jatkuvia kohdassa x_0 , niille pätee määritelmän 16 nojalla $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. Tällöin lauseen 12 nojalla $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Siis funktio $\frac{f}{g}$ on jatkuva kohdassa x_0 . $\square$

Lause 23. Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ on jatkuva, kun $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Osoitetaan väite todeksi induktiotodistuksella.

Oletetaan ensin, että $n = 0$ eli $f(x) = 1$. Koska $\lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$ ja $f(x_0) = 1$ eli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$, funktio on määritelmän 16 nojalla jatkuva.

Oletetaan sitten, että $n = 1$ eli $f(x) = x$. Koska $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ ja $f(x_0) = x_0$ eli

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$, funktio on määritelmän 16 nojalla jatkuva.

Tehdään induktio-oletus eli oletetaan, että funktio $f(x) = x^n$ on jatkuva, kun $n \in \mathbb{N}$. Funktio $g(x) = x \cdot x^n$ on lauseen 21 nojalla kahden jatkuvan funktion tulona jatkuva. Nyt induktioperiaatteen nojalla funktio $g(x) = x \cdot x^n$ on jatkuva, kun $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lause 24. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Polynomifunktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$ on jatkuva.

Todistus. Jos ajatellaan funktion f kertoimia $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ vakiofunktioina, ne ovat jatkuvia määritelmän 16 nojalla, koska $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} a_i = a_i = g(x_0)$, jossa $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Lisäksi lauseen 23 nojalla potenssifunktiot $h(x) = x^i$ ovat jatkuvia. Nyt jokainen funktioon

kuuluva termi $a_i x^i$, jossa $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ja $n \in \mathbb{N}$, on lauseen 21 nojalla jatkuvien funktioiden $g(x) = a_i$ ja $h(x) = x^i$ tulona jatkuva. Lisäksi lauseen 20 nojalla funktio f on jatkuvien funktioiden summana jatkuva. Siis polynomifunktio on jatkuva. $\square$

2.3.3 Funktion derivoituvuus

Seuraavaksi esitellään funktion derivoituvuuteen liittyviä määritelmiä ja todistetaan niiden avulla lauseita.

Määritelmä 25. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ ja $r > 0$ siten, että

$(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$. Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$, niin funktio f on *derivoituva* pisteessä x_0 .

Määritelmä 26. Raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ on funktion f *derivaatta* pisteessä x_0 . Funktion f derivaattaan pisteessä x_0 voi viitata merkinnällä $D_x f(x_0)$.

Määritelmä 27. Lauseke $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ on *erotusosamäärä* pisteessä x_0 .

Funktion derivoituvuus pisteessä x_0 osoitetaan siis laskemalla erotusosamäärän raja-arvo pisteessä x_0 . Funktion derivoituvuuden voi osoittaa myös laskemalla raja-arvon

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$. Lisäksi on hyvä huomioida, että funktion derivaatta lasketaan erotusosamäärän raja-arvon kautta määritelmän 26 mukaisesti, ja derivaatan laskemista helpottavat laskusäännöt ovat johdettavissa nimenomaan kyseisestä määritelmästä.

Seuraava lause osoittaa, että funktion derivoituvuudesta pisteessä x_0 seuraa funktion jatkuvuus pisteessä x_0 .

Lause 28. Jos $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $x_0 \in (a, b)$, niin f on jatkuva pisteessä x_0 .

Todistus. Oletetaan, että $x \in (a, b)$ ja $x \neq x_0$. Tällöin lauseen 10 nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \quad || \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0 \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

eli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. $\square$

Seuraavaksi määritellään, mitä tarkoitetaan, kun sanotaan avoimella välillä määritellyn funktion olevan derivoituva, ja määritellään myös vasemmalta ja oikealta derivoituvuus pisteessä x_0 sekä funktion vasemman- ja oikeanpuoleinen derivaatta. Lisäksi todistetaan vasemman- ja oikeanpuoleiseen derivoituvuuteen liittyvä lause.

Määritelmä 29. Jos funktio $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva jokaisessa pisteessä $x \in (a, b)$, niin funktio f on *derivoituva*.

Määritelmä 30. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ ja $r > 0$ siten, että $(x_0 - r, x_0] \subset A$. Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$, niin funktio f on *vasemmalta derivoituva* pisteessä x_0 .

Määritelmä 31. Raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ on funktion f *vasemmanpuoleinen derivaatta* pisteessä x_0 . Funktion f vasemmanpuoleiseen derivaattaan pisteessä x_0 voi viitata merkinnällä $D_x^- f(x_0)$.

Määritelmä 32. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ ja $r > 0$ siten, että $[x_0, x_0 + r) \subset A$. Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$, niin funktio f on *oikealta derivoituva* pisteessä x_0 .

Määritelmä 33. Raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ on funktion f *oikeanpuoleinen derivaatta* pisteessä x_0 . Funktion f oikeanpuoleiseen derivaattaan pisteessä x_0 voi viitata merkinnällä $D_x^+ f(x_0)$.

Seuraavan lauseen avulla voidaan tarkastella esimerkiksi paloittain määritellyn funktion derivoituvuutta kohdassa, jossa funktion lauseke vaihtuu.

Lause 34. Oletetaan, että $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$ siten, että $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$. Funktio f on derivoituva pisteessä x_0 , jos ja vain jos se on sekä vasemmalta että oikealta derivoituva pisteessä x_0 ja sen toispuoleiset derivaatat pisteessä x_0 ovat yhtä suuret eli $D_x^- f(x_0) = D_x^+ f(x_0)$. Tällöin $D_x f(x_0) = D_x^- f(x_0) = D_x^+ f(x_0)$.

Todistus.

" $\Rightarrow$ ": Oletetaan, että funktio f on derivoituva pisteessä x_0 . Tällöin määritelmän 25 nojalla on olemassa raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \mathbb{R}$. Koska $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$ siten, että $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$, lauseen 15 nojalla

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$. Tällöin määritelmien 31 ja 33 nojalla

$D_x^- f(x_0) = D_x^+ f(x_0) = a$ eli $D_x f(x_0) = D_x^- f(x_0) = D_x^+ f(x_0)$. Koska

$(x_0 - r, x_0] \subset (x_0 - r, x_0 + r) \subset A$ ja raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \mathbb{R}$ on olemassa, määritelmän 30 nojalla funktio f on vasemmalta derivoituva pisteessä x_0 . Koska

$[x_0, x_0 + r) \subset (x_0 - r, x_0 + r) \subset A$ ja raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \mathbb{R}$ on olemassa, määritelmän 32 nojalla funktio f on oikealta derivoituva. Siis funktio f on vasemmalta ja oikealta derivoituva pisteessä x_0 ja sen toispuoleiset derivaatat pisteessä x_0 ovat yhtä suuret eli

$D_x^- f(x_0) = D_x^+ f(x_0) = a$ ja $D_x f(x_0) = D_x^- f(x_0) = D_x^+ f(x_0)$.

" $\Leftarrow$ ": Oletetaan, että funktio f on vasemmalta ja oikealta derivoituva pisteessä x_0 ja että sen toispuoleiset derivaatat pisteessä x_0 ovat yhtä suuret eli $D_x^- f(x_0) = D_x^+ f(x_0)$. Tällöin määritelmien 31 ja 33 nojalla $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ sekä määritelmien 30 ja 32 nojalla

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \mathbb{R}$. Tällöin lauseen 15 nojalla raja-arvo

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \mathbb{R}$ on olemassa eli määritelmän 25 nojalla funktio f on derivoituva pisteessä x_0 ja määritelmän 26 nojalla $D_x f(x_0) = a$ eli $D_x f(x_0) = D_x^- f(x_0) = D_x^+ f(x_0)$. $\square$

Seuraavaksi määritetään merkintä $f'(x_0)$.

Määritelmä 35. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}$ on väli, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$. Merkintää $f'(x_0)$ voidaan käyttää alla mainituissa tilanteissa.

- 1) Jos funktio f on derivoituva pisteessä x_0 , jolloin $f'(x_0) = D_x f(x_0)$.
- 2) Jos funktio f on oikealta derivoituva pisteessä x_0 ja välin A vasemmanpuoleinen päätepiste on x_0 , jolloin $f'(x_0) = D_x^+ f(x_0)$.
- 3) Jos funktio f on vasemmalta derivoituva pisteessä x_0 ja välin A oikeanpuoleinen päätepiste on x_0 , jolloin $f'(x_0) = D_x^- f(x_0)$.

Seuraavaksi osoitetaan, että tarkastelukohdassa derivoituvien funktioiden summat, tulot ja osamäärät ovat derivoituvia kyseisessä kohdassa. Lisäksi osoitetaan, että potenssifunktiot ja polynomifunktiot ovat derivoituvia. Näiden tulosten avulla voidaan mainita kaikki käsiteltävät potenssi- ja polynomifunktiot derivoituviksi.

Lause 36. Jos funktio $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva kohdassa $x_0 \in A$, ja $a \in \mathbb{R}$, niin funktio $af: A \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva kohdassa x_0 ja $(af)'(x_0) = af'(x_0)$.

Todistus. Koska funktio f on derivoituva, määritelmien 25 ja 35 nojalla on olemassa erotusosamäärän raja-arvo $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$. Lausetta 9 käyttämällä saadaan määritettyä erotusosamäärän raja-arvo

$$(af)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{af(x) - af(x_0)}{x - x_0} = a \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = af'(x_0) \in \mathbb{R},$$

ja koska raja-arvo on siis olemassa, määritelmän 25 nojalla funktio af on derivoituva kohdassa x_0 ja $(af)'(x_0) = af'(x_0)$. $\square$

Lause 37. Jos funktiot $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ovat derivoituvia kohdassa $x_0 \in A$, niin funktio $f + g: A \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva kohdassa x_0 ja $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Todistus. Koska funktiot f ja g ovat derivoituvia, määritelmien 25 ja 35 nojalla on olemassa erotusosamäärien raja-arvot $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ ja

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Tällöin lausetta 8 käyttämällä saadaan määritettyä erotusosamäärän raja-arvo

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0) \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

ja koska raja-arvo on siis olemassa, määritelmän 25 nojalla funktio $f+g$ on derivoituva kohdassa x_0 ja $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. $\square$

Lause 38. Jos funktiot $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ovat derivoituvia kohdassa $x_0 \in A$, niin funktio $fg: A \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva kohdassa x_0 ja $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Todistus. Koska funktiot f ja g ovat derivoituvia, määritelmien 25 ja 35 nojalla on olemassa erotusosamäärien raja-arvot $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ ja

$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$. Tällöin lauseita 8 ja 10 käyttämällä saadaan määritettyä erotusosamäärän raja-arvo

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

ja koska raja-arvo on siis olemassa, määritelmän 25 nojalla funktio fg on derivoituva kohdassa x_0 ja $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. $\square$

Lause 39. Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ on derivoituva, kun $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi kaikilla $x \in \mathbb{R}$ $D_x(x^0) = D_x(1) = 0, D_x x = 1$ ja $D_x x^n = nx^{n-1}$, kun $n \geq 2$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $n = 0$ eli $f(x) = x^0 = 1$. Tällöin

$$D_x(x^0) = D_x(1) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{1 - 1}{y - x} = 0 \in \mathbb{R} \text{ eli määritelmän 25 nojalla funktio}$$

$f(x) = x^0 = 1$ on derivoituva, ja sen derivaatta on $D_x(x^0) = 0$.

Oletetaan sitten, että $n = 1$ eli $f(x) = x$. Tällöin

$$D_x(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - x}{y - x} = 1 \text{ eli määritelmän 25 nojalla funktio } f(x) = x \text{ on derivoi-}$$

tuva, ja sen derivaatta on $D_x(x) = 1$.

Oletetaan seuraavaksi, että $n = 2$ eli $f(x) = x^2$. Tällöin lauseen 8 nojalla erotusosamäärän raja-arvoksi saadaan

$$D_x(x^2) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^2 - x^2}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y+x)(y-x)}{y-x} = \lim_{y \rightarrow x} (y+x) = 2x \in \mathbb{R} \text{ eli määritelmän 25}$$

nojalla funktio $f(x) = x^2$ on derivoituva, ja sen derivaatta on $D_x(x^2) = 2x$.

Osoitetaan induktiotodistuksella, että kun $n \geq 2$, funktio $f(x) = x^n$ on derivoituva. Tehdään induktio-oletus eli oletetaan, että funktio $f(x) = x^n$ on derivoituva, kun $n \geq 2$, ja sen derivaatta kohdassa x on nx^{n-1} . Funktio $g(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n$ on lauseen 38 nojalla kahden derivoituvan funktion tulona derivoituva, ja sen derivaatta kohdassa x on $D_x(x^{n+1}) = D_x(x) \cdot x^n + x \cdot D_x(x^n) = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + nx^n = (1+n)x^n$. Siis funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ on derivoituva, kun $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lause 40. Polynomifunktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$ on derivoituva, kun $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi kaikilla $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$.

Todistus. Jos ajatellaan funktion f termien kertoimia $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ vakiofunktioina, ne ovat

derivoituvia määritelmän 25 nojalla, koska $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_i - a_i}{x - x_0} = 0 \in \mathbb{R}$, jossa

$i = 0, 1, 2, \dots, n$ ja $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi lauseen 39 nojalla potenssifunktiot $h(x) = x^i$, jossa

$i = 0, 1, 2, \dots, n$ ja $n \in \mathbb{N}$, ovat derivoituvia. Nyt jokainen funktioon kuuluva termi $a_i x^i$, jossa

$i = 0, 1, 2, \dots, n$ ja $n \in \mathbb{N}$, on lauseen 38 nojalla derivoituvien funktioiden $f(x) = a_i$ ja

$g(x) = x^i$ tulona derivoituva. Lisäksi lauseen 37 nojalla funktio f on derivoituvien funktioiden summana derivoituva. Siis polynomifunktio on derivoituva. $\square$

Nyt, kun on määritelty funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden kannalta tärkeät käsitteet ja todistettu niihin liittyvät keskeiset tulokset, voidaan siirtyä tarkastelemaan sitä, miten

funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta tulisi lukion opetussuunnitelman perusteella opettaa lukiossa.

2.4 Funktion jatkuvuus ja derivoituvuus lukion opetussuunnitelmassa

Opetussuunnitelman perusteet on määräys, jonka Opetushallitus antaa. Koska se on määräys, paikalliset opetussuunnitelmat, joita kouluissa noudatetaan, on laadittava opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti. (Opetushallitus, 2019.) Tämän vuoksi opetussuunnitelman perusteet määrittää sen, mitä kouluissa opiskellaan, ja siksi on tärkeää käydä läpi sitä, mitä opetussuunnitelman perusteissa määrätään funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden opettamisesta.

Uusimmat ja edelleen syksyllä 2024 voimassa olevat opetussuunnitelman perusteet ovat perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet vuodelta 2014 ja lukion opetussuunnitelman perusteet vuodelta 2019 (Opetushallitus, 2014, 2019). Tarkastelemme seuraavaksi siis pelkästään näitä uusimpia opetussuunnitelman perusteita.

Funktion jatkuvuus ja derivoituvuus tulevat tutuiksi oppilaille vasta lukiossa, sillä peruskoulussa niitä ei perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014 mukaan vielä opeteta (Opetushallitus, 2014). Perusopetuksen vuosiluokilla 7-9 vasta tutustutaan funktion käsitteeseen muun muassa piirtämällä suoria koordinaatistoon ja perehtymällä suoraan ja kääntäen verrannollisuuteen (Opetushallitus, 2014).

Lukiossa funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta tarkastellaan lähinnä lukion pitkän matematiikan puolella. Lukion lyhyessä matematiikassa jatkuvuutta ja derivoituvuutta lähimpänä käydään lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 mukaan moduulissa MAB8 Matemaattinen analyysi, jossa muun muassa derivoidaan polynomifunktioita. Opetussuunnitelman mukaan missään lyhyen matematiikan moduulissa ei kuitenkaan käsitellä funktion jatkuvuutta tai derivoituvuutta. (Opetushallitus, 2019.)

Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 mukaan pitkän matematiikan puolella funktion jatkuvuuteen perehdytään ensimmäisen kerran moduulissa MAA6 Derivaatta, mutta jatkuvuuden tarkastelua syvennetään moduulissa MAA12 Analyysi ja jatkuva jakauma, jossa myös

tutustutaan funktion derivoituvuuden tarkasteluun (Opetushallitus, 2019). Moduulien sisältöjä on avattu enemmän taulukossa 1. Tiedot ovat peräisin lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 (Opetushallitus, 2019) lisäksi aineistosta Pitkän matematiikan tukimateriaalia – Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 pitkän matematiikan moduulien sisältöjen tarkastelua (MAOL, 2019; Opetushallitus, 2019).

Taulukko 1. Lukion opetussuunnitelman 2019 pitkän matematiikan moduulien MAA6 ja MAA12 sisällöt funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden kannalta.

Moduuli	Materiaali	Funktion jatkuvuus	Funktion derivoituvuus
MAA6	LOPS2019 (Opetushallitus, 2019)	Yleisissä tavoitteissa: omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta ja jatkuvuudesta	Yleisissä tavoitteissa: - tutustuu ilmiöiden matemaattisten mallien käyttäytymiseen derivaatan avulla - ymmärtää derivaatan tulkinnan funktion muutosnopeutena - kykenee määrittämään yksinkertaisten funktioiden derivaatat - osaa derivoida yhdistettyjä funktioita - hallitsee funktioiden kulun tutkimisen derivaatan avulla ja osaa määrittää niiden ääriarvot suljetulla välillä - osaa käyttää ohjelmistoja raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa sovellusten yhteydessä
		Keskeisissä sisällöissä: funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta	Keskeisissä sisällöissä: - funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta - polynomi- ja rationaalifunktioiden sekä juurifunktion derivaatat - sini- ja kosinifunktioiden sekä eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat - funktioiden tulon ja osamäärän derivaatta - yhdistetty funktio ja sen derivointi

Moduuli	Materiaali	Funktion jatkuvuus	Funktion derivoituvuus
	Pitkän matematiikan tukimateriaali (MAOL, 2019)	• sellaiset jatkuvuustarkastelut, joissa toispuoleisia raja-arvoja ei tarvitse laskea • jatkuvuuden tarkastelu kohdassa $x = a$ • jatkuvuuden tarkastelu välillä $]a, b[$	• funktion keskimääräinen ja hetkellinen muutosnopeus • erotusosamäärän raja-arvo • derivaattafunktio • alkeisfunktioiden derivoiminen • tangentti
MAA12	LOPS2019(Opetushallitus, 2019)	Yleisissä tavoitteissa: • syventää ymmärrystään analyysin peruskäsitteistä	Yleisissä tavoitteissa: • syventää ymmärrystään analyysin peruskäsitteistä
		Keskeisissä sisällöissä: • funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen • jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia	Keskeisissä sisällöissä: • funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen • jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia
	Pitkän matematiikan tukimateriaali (MAOL, 2019)	• tutkitaan funktioiden jatkuvuutta kuvaajan avulla sekä laskennallisesti • kerrataan ja syvennetään tietoja funktion jatkuvuudesta • toispuoleinen raja-arvo • tarkastellaan epäjatkuvia funktioita sekä jatkuvia mutta epäderivoituvia funktioita	• tutkitaan funktioiden derivoituvuutta kuvaajan avulla sekä laskennallisesti • kerrataan ja syvennetään tietoja funktion derivoituvuudesta, derivaatasta ja derivaattafunktiosta • toispuoleinen raja-arvo ja derivaatta • tarkastellaan jatkuvia mutta epäderivoituvia funktioita • derivoituva funktio on jatkuva, mutta jatkuva funktio ei aina ole derivoituva

MAOLin tekemän tukimateriaalin (MAOL, 2019) mukaan funktion derivoituvuuteen, toispuoleisiin raja-arvoihin sekä toispuoleiseen jatkuvuuteen mennään siis vasta moduulissa MAA12, joka on valinnainen moduuli. Tällöin sitä ei siis ole pakko käydä, mikä tarkoittaa sitä, että osa pitkän matematiikan kokeen ylioppilaskirjoituksissa tekevästä ei ole välttämättä edes tietoisia kyseisten käsitteiden olemassaolosta. Tällöin esimerkiksi funktion derivoituvuutta tai paloittain määritellyn funktion jatkuvuutta on mahdotonta tarkastella jatkuvuuden tai derivoituvuuden määritelmien kautta.

Esimerkiksi Editan lukion opetussuunnitelman 2019 mukaisen pitkän matematiikan moduulin MAA6 kirjassa Kaari MAA6 on määritelty funktion f jatkuvuuden ehdoksi kohdassa x_0 $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Lisäksi kerrotaan, että funktiota sanotaan jatkuvaksi, kun se on jatkuva

koko määrittelyjoukossaan, ja kaikkialla jatkuvaksi, jos funktio on jatkuva koko reaalijoukossa $\mathbb{R}$. Kirjassa myös kerrotaan, että kaikki alkeisfunktio, mukaan lukien polynomifunktiot, ovat määrittelyjoukossaan jatkuvia. Funktion derivaatta kohdassa määritellään kirjassa funktion erotusosamäärän raja-arvona kyseisessä kohdassa. (Järnström ym., 2022.)

Funktion toispuoleista jatkuvuutta ja jatkuvuuden tarkastelua toispuoleisten raja-arvojen avulla käsitellään vasta Editan lukion opetussuunnitelman 2019 mukaisen pitkän matematiikan moduulin MAA12 kirjassa Kaari MAA12. Funktio f määritellään vasemmanpuoleisesti jatkuvaksi kohdassa x_0 , jos funktiolle pätee $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, ja oikeanpuoleisesti jatkuvaksi kohdassa x_0 , jos funktiolle pätee $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. Kirjassa mainitaan, että jos funktiolle pätee $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, niin funktio on jatkuva kohdassa x_0 . (Järnström ym., 2023.)

Funktion derivoituvuus määritellään Editan Kaari-kirjasarjassa ensimmäisen kerran vasta kirjassa Kaari MAA12. Kirjassa sanotaan, että funktio f on derivoituva kohdassa x_0 , jos funktion derivaatta eli erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on olemassa ja yksikäsitteinen. Lisäksi kirjassa on lause, jonka mukaan funktio on jatkuva kohdassa x_0 , jos se on derivoituva kohdassa x_0 . Kirjassa määritellään myös funktion f vasemmanpuoleiseksi derivaataksi kohdassa x_0

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ja oikeanpuoleiseksi derivaataksi kohdassa x_0

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

joiden avulla saadaan tutkittua funktion f derivoituvuutta kohdassa x_0 tarkastelemalla, toteutuuko ehto $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Kuten jatkuvuuden tapauksessa, myös derivoituvuuden kohdalla on määritelty funktio f derivoituvaksi silloin, kun se on derivoituva koko määrittelyjoukossaan, ja kaikkialla derivoituvaksi, kun se on derivoituva koko reaalijoukossa $\mathbb{R}$. Lisäksi

kerrotaan, että alkeisfunktiot ovat derivoituvia määrittelyjoukossaan. (Järnström ym., 2023.)

Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019 funktion derivointiin kiinnitetään huomattavasti enemmän huomiota kuin funktion derivoituvuuden tarkasteluun, koska moduuli MAA6 käsittelee pitkälti erilaisten funktioiden derivointia, kun taas vasta moduulissa MAA12 käsitellään funktion derivoituvuuden tarkastelua. Moduulissa MAA12 käsitellään myös paljon muita asioita kuin derivoituvuutta tai jatkuvuutta, sillä moduulissa esimerkiksi syvennetään integroimistaitoja ja tutustutaan jatkuvaan jakaumaan (Opetushallitus, 2019). Tällöin herää kysymys, jääkö opiskelijoiden ymmärrys funktion derivoituvuuden tarkastelusta kuinka ohueksi esimerkiksi ylioppilaskirjoituksia tai jatko-opintoja silmällä pitäen.

2.5 Virhe ja virhekäsitys

Ennen kuin tutkitaan sitä, millaisia virhekäsityksiä ja virheitä funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyen on aikaisemmissa tutkimuksissa havaittu, on hyvä määritellä, mitä käsitteet virhe ja virhekäsitys tarkoittavat. Vaikka käsitteet liittyvät toisiinsa, niissä on myös ero (Luneta & Makonye, 2010), ja se on tärkeää ymmärtää.

Virhe voidaan määritellä mokaksi, lipsahdukseksi tai epätarkkuudeksi. Virhe ei yleensä toistu ratkaisun edetessä. (Luneta & Makonye, 2010.) Virheeksi voi luokitella esimerkiksi tilanteen, jossa oppilas on derivoidessaan funktiota $f(x) = x^2 + 2x + 1$ unohtanut vähentää termistä x^2 potenssissa olevasta luvusta luvun 1 eli merkannut $D(x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 2$, mutta myöhemmässä kohdassa ratkaisua oppilas on kuitenkin osannut derivoida vastaavanlaisen funktion oikein.

Virhekäsitys on sen sijaan jonkinlainen väärinymmärrys tai väärintulkinta, joka johtuu erilaisista naiiveista teorioista. Yksi esimerkki tällaisesta naiivista teoriasta on, että kertolasku kasvattaa aina lukua. (Ojose, 2015.)

Virhe on usein selvästi nähtävissä ratkaisussa, kun taas virhekäsitys voi jäädä piiloon, sillä se voi pahimmillaan tuottaa oikean vastauksen. Tämän vuoksi opettajan tulisi varmistaa, miten oppilas on päätenyt vastaukseen, jotta virhekäsitykset saisi kitkettyä pois. (Luneta &

Makonye, 2010.)

Koska nyt virheen ja virhekäsityksen käsitteet on määritelty ja niiden välinen ero selvinnyt, voidaan siirtyä tarkastelemaan, millaisia funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä on aikaisemmissa tutkimuksissa havaittu.

2.6 Funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä

Funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä on tutkittu aikaisemmin lukioikäisten ja yliopisto-opiskelijoiden keskuudessa eri puolilla maailmaa. Seuraavaksi tutustutaan tuloksiin, joita aikaisemmista tutkimuksista on saatu. Tarkoituksena on esitellä mahdollisimman laajasti erilaisia funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä, joita on tutkimuksissa havaittu. Vaikka tässä tutkimuksessa tutkitaan virheitä ja virhekäsityksiä, joita on havaittu ylioppilaskirjoituksissa eli pääosin lukioikäisten tekeminä, esitellään seuraavaksi myös tutkimuksia, joissa funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virheitä ja virhekäsityksiä on tutkittu yliopisto-opiskelijoiden keskuudessa. Tämä on perusteltua, koska jos yliopisto-opiskelijoidenkin keskuudessa on vielä virhekäsityksiä käsitteistä, jotka on opetettu jo lukiossa, on luultavaa, että tällaisia virhekäsityksiä on myös lukioikäisten keskuudessa.

Käytetty kirjallisuus on valittu sen vuoksi, että se soveltuu erinomaisesti erilaisten havaittujen funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvien virhekäsitysten kartoittamiseen. Lisäksi nämä lähteet ovat valikoituneet sen vuoksi, että niihin on viitattu runsaasti vielä viime vuosinakin kirjoitetuissa kyseistä aihepiiriä käsittelevissä tutkimusartikkeleissa.

Taulukossa 2 on aikaisemmissa tutkimuksissa havaittuja funktion jatkuvuuteen liittyviä virhekäsityksiä tai virheitä, ja taulukossa 3 on funktion derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä tai virheitä. Taulukoiden 2 ja 3 sisältöjä avataan tarkemmin seuraavaksi.

Taulukko 2. Funktion jatkuvuuteen liittyviä virhekäsityksiä, joita on aikaisemmissa tutkimuksissa havaittu.

Jatkuvuuteen liittyvä virhekäsitys tai virhe
Jatkuvan funktion kuvaaja on aina yhtenäinen eli kynää ei tarvitse nostaa piirrettäessä funktion kuvaajaa (esim. Tall & Vinner, 1981; Duru ym., 2010).
Jatkuvan funktion on oltava myös derivoituva (esim. Tall & Vinner, 1981).
Paloittain määritelty funktio ei voi olla jatkuva (esim. Tall & Vinner, 1981).
Jatkuvan funktion ominaisuuksiksi ajatellaan derivoituvan funktion ominaisuuksia (Tall & Vinner, 1981; Viholainen, 2008).
Jos funktiolla on raja-arvo pisteessä x_0 , se on jatkuva kyseisessä pisteessä (Duru ym., 2010).
Jos funktio on määritelty pisteessä x_0 , se on jatkuva kyseisessä pisteessä (Duru ym., 2010).

Taulukko 3. Funktion derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä, joita on aikaisemmissa tutkimuksissa havaittu.

Derivoituvuuteen liittyvä virhekäsitys tai virhe
Funktio on derivoituva pisteessä x_0 , jos sillä on raja-arvo ja se on määritelty kyseisessä pisteessä (Duru ym., 2010).
Jos derivaatta on luku 0 pisteessä x_0 , se ei ole derivoituva kyseisessä pisteessä (Duru ym., 2010).
Derivoituvuuden määritelmää ei osata käyttää oikein (Viholainen, 2006).
Derivoituvuuden tarkastelua varten ei tarvitse laskea erotusosamäärän raja-arvoa, vaan derivoituvuuden voi osoittaa muutenkin (Seldon ym., 1998; Viholainen, 2006).
Jatkuvuus on riittävä perustelu derivoituvuudelle (Meel, 1998; Duru ym., 2010).
Derivoituva funktio voi olla epäjatkuva (Viholainen, 2006).

2.6.1 Funktion jatkuvuuteen liittyvät virhekäsitykset

Funktion jatkuvuuteen liittyy monia virhekäsityksiä, jotka voivat juontaa juurensa siitä, että käsitettä *jatkuvuus* käytetään monessa eri yhteydessä arkielämän kontekstissa. Jatkuvuuden käsitteen käsitekuvan voi siis sanoa syntyvän useasta eri lähteestä. Esimerkiksi sadetta voi kuvata jatkuvaksi. Useat ajattelevatkin, että funktion jatkuvuudella tarkoitetaan tilanteita, joissa funktion kuvaaja voidaan piirtää siten, ettei kynää nosteta paperista. Tällöin siis jatkuvan funktion kuvaajan ajatellaan olevan yhtenäinen, eikä kuvaajassa saisi tämän ajattelutavan perusteella olla aukkoja. (Tall & Vinner, 1981.) Tällöin funktion jatkuvuus ja funktion kuvaajan yhtenäisyys sekoitetaan keskenään, ja usein opettaja voi itse huolimattomilla ilmaisuillaan olla edesauttamassa jatkuvuuteen liittyvien virhekäsitysten muodostumista (Cornu, 1991).

Tallin ja Vinnerin (1981) tutkimuksessa tutkittiin opiskelijoita, jotka olivat aloittamassa matematiikan opinnot englantilaisessa yliopistossa. Tutkimuksen perusteella jatkuvuuden

edellytyksenä pidettiin usein sitä, ettei funktion kuvaajassa ole aukkoja tai hyppäyksiä, että funktion lauseke on annettu yhtenä kaavana eli funktio ei ole paloittain määritelty ja ettei funktion kuvaajan kaltevuus muutu liian nopeasti. Nämä kaikki käsitykset ovat kuitenkin ristiriidassa formaalin käsitteen määritelmän kanssa, sillä jatkuvuuden määritelmän nojalla jatkuvan funktion kuvaajassa voi olla aukkoja, jatkuva funktio voi olla paloittain määritelty ja funktion kuvaajan kaltevuus voi jatkuvuudesta huolimatta vaihdella rajustikin. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \text{ tai } x^2 < 2 \\ 1, & \text{kun } x > 0 \text{ tai } x^2 > 2 \end{cases}$$

on jatkuva, mutta se on paloittain määritelty ja sen kuvaajassa on aukkoja. Koska osa opiskelijoista ajatteli, ettei jatkuvan funktion kuvaajan kaltevuus voi muuttua liian rajusti, sekoitettiin funktion jatkuvuus ja derivoituvuus keskenään tai ajateltiin, että derivoituvuus on edellytys jatkuvuudelle. (Tall & Vinner, 1981.)

Myös Viholaisen (2008) tutkimuksessa havaittiin, että funktion jatkuvuus ja derivoituvuus menevät sekaisin. Tutkimuksessa haastateltiin viidennen vuoden matematiikan opettajaopiskelijaa, ja haastattelussa opiskelija ei ollut haastattelun alussa varma, liittyykö se, ettei funktion kuvaajassa ole teräviä kulmia, funktion jatkuvuuteen vai derivoituvuuteen (Viholainen, 2008).

Duru, Köklü ja Jakubowski (2010) tutkivat 59:n matematiikan opettajaksi opiskelevien käsityksiä funktion jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta Turkissa. Opiskelijat olivat parhaillaan suorittamassa matematiikan perusteiden kurssia (Duru ym., 2010) eli heidän esitietonsa eivät luultavasti olleet merkittävästi paremmat kuin suomalaisella abiturientilla. Tutkimuksessa esimerkiksi havaittiin, että 63 % opiskelijoista eivät kyenneet määrittelemään funktion kuvaajan perusteella kaikkia funktion epäjatkuvuuskohtia. 12 % kaikista opiskelijoista perusteli funktion epäjatkuvuutta tietyssä pisteessä sillä, että piirrettäessä funktiota kynää joutuu nostamaan paperista kyseisessä pisteessä. Lisäksi 12 % opiskelijoista ajatteli, että riittävä edellytys jatkuvuudelle pisteessä on se, että funktiolla on raja-arvo kyseisessä pisteessä, ja 22 % opiskelijoista piti riittävänä ehtona jatkuvuudelle pisteessä sitä, että funktio on määritelty kyseisessä pisteessä. (Duru ym., 2010.)

Tutkimuksessa havaittiin myös, että opiskelijat kykenivät määrittämään funktion epäjatkuvuuskohdat paremmin silloin, kun funktion lauseke annettiin eli kun heidän ei tarvinnut turvautua pelkästään funktion kuvaajaan. Kun funktio annettiin graafisen esitystavan sijasta

symbolisesti, 68 % opiskelijoista määritteli kaikki epäjatkuvuuskohdat oikein. Suurin osa opiskelijoista perusteli epäjatkuvuuskohtien valintaansa jatkuvuuden määritelmän avulla ja piirtämällä funktion kuvaajan. Mielenkiintoista oli se, että yksi opiskelijoista oli graafisesti annetun funktion kohdalla ajatellut virheellisesti riittäväksi ehdoksi funktion jatkuvuudelle pisteessä sen, että funktio on määritelty kyseisessä pisteessä, mutta kuitenkin osannut käyttää oikein funktion jatkuvuuden määritelmää symbolisesti annetun funktion kohdalla. (Duru ym., 2010.) Opiskelija ei siis jostain syystä osannut käyttää jatkuvuuden määritelmää tarkastellessaan funktion kuvaajasta epäjatkuvuuskohtia.

2.6.2 Funktion derivoituvuuteen liittyvät virhekäsitykset

Myös opiskelijoiden selviytymistä derivoituvuuteen liittyvissä tehtävissä, jotka ovat rutiininomaisia tehtäviä hankalampia, on tutkittu. Seldenin ym. (1998) tutkimuksessa tutkittiin 50 Tennesseen teknillisen yliopiston opiskelijaa, jotka olivat läpäisseet ensimmäisellä vuosineljänneksellä pidetyn differentiaali- ja integraalilaskennan kurssin arvosanalla C, kun mahdollisia arvosanoja oli A, B, C, D, F ja W, joista A oli paras. Seldenin ym. (1998) tutkimuksessa opiskelijoita pyydettiin muun muassa löytämään sellaiset vakiot a ja b , että funktio

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{kun } x \leq 1 \\ bx^2 + x + 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

on derivoituva, kun $x = 1$. Yhdeksän opiskelijaa asetti kaavat ax ja $bx^2 + x + 1$ yhtä suuriksi ja arvasi muuttujien a ja b arvot (Selden ym., 1998). Opiskelijat eivät siis käyttäneet derivoituvuuden määritelmää ja laskeneet toispuoleisia derivaattoja.

Durun ja muiden (2010) tutkimuksessa havaittiin myös useita derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä. 15 % opiskelijoista ajatteli, että funktio on derivoituva tarkastelupisteessä, kun funktio on määritelty ja funktiolla on raja-arvo kyseisessä pisteessä. Osa opiskelijoista taas ajatteli, että funktio on epäderivoituva pisteessä, jos sen derivaatta kyseisessä pisteessä on yhtä kuin luku 0. (Duru ym., 2010.)

2.6.3 Funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden väliseen yhteyteen liittyvät virhekäsitykset

Eräät aiemmissa tutkimuksissa havaitut virhekäsitykset funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvissä tehtävissä koskevat funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden välistä yhteyttä (esim. Tall & Vinner, 1981; Meel, 1998). Lauseiden 28 ja 26 nojalla derivoituva funktio

on jatkuva, mutta sen sijaan kaikki jatkuvat funktiot eivät ole derivoituvia. Funktion derivoituvuudesta seuraa siis funktion jatkuvuus, mutta funktion jatkuvuudesta ei seuraa automaattisesti funktion derivoituvuutta. Tämän yhteyden ymmärtämisessä on aikaisempien tutkimusten perusteella ongelmia.

Esimerkiksi Tallin ja Vinnerin (1981) tutkimuksessa havaittiin, että osa opiskelijoista piti jatkuvan funktion ominaisuutena sitä, ettei funktion kuvaajan kaltevuus muutu liian rajusti. He pitivät siis derivoituvuutta edellytyksenä jatkuvuudelle.

Meel (1998) taas tutki 26 differentiaali- ja integraalilaskennan yliopisto-opiskelijaa teettämällä heillä differentiaali- ja integraalilaskentaan liittyviä tehtäviä, ja tutkimuksen mukaan enemmistöllä opiskelijoista oli käsitys, että jatkuvuus on riittävä ehto derivoituvuudelle. Tämä tuli ilmi tehtävässä, jossa kysyttiin sellaisen funktion derivoituvuutta, joka oli kaikkialla jatkuva, mutta eräässä pisteessä epäderivoituva (Meel, 1998). Monet opiskelijoista tarkastelivat tehtävässä vain funktion jatkuvuutta ja tekivät johtopäätöksiä funktion derivoituvuudesta sen pohjalta ymmärtämättä, ettei jatkuvuus riitä perusteluksi derivoituvuudelle (Meel, 1998). Myös Viholainen (2007) havaitsi haastattellessaan 18:aa matematiikan opettajaopiskelijaa, että osa ajatteli jatkuvuuden olevan riittävä ehto derivoituvuudelle.

Meelin (1998) ja Viholaisen (2007) lisäksi myös Durun ja muiden (2010) tutkimukseen osallistuneista opiskelijoista osa (59 %) ymmärsi lauseen 28 sisällön väärin. Heistä suurin osa ajatteli, että jatkuvuus on riittävä ehto derivoituvuudelle, joten he eivät ymmärtäneet tarkastella derivoituvuutta pisteissä, joissa funktio oli jatkuva. He siis kuvittelivat, että funktio on epäderivoituva vain funktion epäjatkuvuuskohdissa, joten heidän mielestään ei ollut järkeä etsiä muualta kuin funktion epäjatkuvuuskohdista kohtia, joissa funktio on epäderivoituva. (Duru ym., 2010.)

Viholaisen (2006) tutkimukseen osallistuneista neljäsosa taas joko muisti jatkuvuuden ja derivoituvuuden yhteyden väärinpäin tai ei muistanut sitä lainkaan, sillä funktion vastattiin olevan samaan aikaan sekä epäjatkuva että derivoituva.

2.6.4 Muita differentiaali- ja integraalilaskennan tehtävien ratkaisussa havaittuja virheitä ja virhekäsityksiä

Jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvissä tehtävissä on havaittu myös muita kuin suoraan funktion jatkuvuuteen tai derivoituvuuteen liittyviä virhekäsityksiä. Esimerkiksi Tarmizin (2010) tutkimuksessa haastateltiin 20:tä pääosin matematiikkaa pääaineenaan opiskelevaa yliopisto-opiskelijaa ja havaittiin, että heillä oli vaikeuksia useissa differentiaali- ja integraalilaskennan tehtäviin liittyvissä asioissa. Tutkimuksessa annettiin opiskelijoille tehtäväksi laskea $f(3x) + f\left(\frac{2}{x}\right)$, $x \neq 0$, kun $f(x) = \frac{4x+2}{x-1}$, $x \neq 1$. Tutkimuksen perusteella osalla opiskelijoista oli vaikeuksia hahmottaa funktion merkintää täysin, sillä yksi opiskelijoista esimerkiksi laskikin arvon $3f(x) + 2$, kun piti laskea arvo $f(3x + 2)$. (Tarmizi, 2010.)

Myös Zulu ja Nalube (2020) havaitsivat tutkimuksessaan, että opiskelijoilla on vaikeuksia funktion merkinnän kanssa. Zulu ja Nalube (2020) tutkivat 20 lukioikäisen onnistumista differentiaali- ja integraalilaskennan tehtävissä, ja heidän tutkimukseensa osallistuneista opiskelijoista 85 prosentilla oli hankaluuksia merkintöjen $f(x + h)$ ja $f(x)$ kanssa. Tämä heijastuu myös erotusosamäärän raja-arvon laskemisessa siten, että saadaan vääriä arvoja, joiden perusteella taas saatetaan tehdä vääriä johtopäätöksiä derivoituvuudesta. Zulun ja Naluben (2020) tutkimuksen mukaan opiskelijat eivät välttämättä halua käyttää derivoituvuuden määritelmää, koska he pitävät erotusosamäärän raja-arvon laskemista hankalana. Sen lisäksi, että merkintöjen $f(x + h)$ ja $f(x)$ kanssa oli ongelmia, erotusosamäärän raja-arvo laskettiin väärin Zulun ja Naluben (2020) tutkimuksessa esimerkiksi siksi, että raja-arvon merkinnän ajateltiin koskevan vain erotusosamäärän osoittajaa.

Myös Viholainen (2006) havaitsi tutkimuksessaan, ettei erotusosamäärän raja-arvoa osata tai haluta laskea derivoituvuutta tarkasteltaessa. Viholainen (2006) teetti Suomessa 146 ja Ruotsissa 20 matematiikan opettajaopiskelijalla kokeen, johon yli neljäsosa vastanneista vastasi virheellisesti funktion

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{kun } x \neq 4 \\ 1, & \text{kun } x = 4 \end{cases}$$

olevan samaan aikaan epäjatkuva ja derivoituva. Kahdeksaa näin vastanneista haastateltiin. Haastatteluista kävi ilmi, että derivoituvuuden tarkasteluun ei käytetty derivoituvuuden määritelmää vaan esimerkiksi funktion h derivoituvuuden tarkastelua varten derivoitiin

derivointisääntöjen avulla lausekkeet $x^2 - 4x + 3$ ja 1 erikseen. Lisäksi kun eräs haastatelluista käytti derivoituvuuden määritelmää funktion

$$i(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x < 1 \\ x + 1, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

derivoituvuuden tarkasteluun, hän käytti määritelmää väärin laskemalla lausekkeille x ja $x + 1$ erikseen erotusosamäärän raja-arvot kohdassa $x = 1$ sen sijaan, että olisi laskenut toispuoleisia raja-arvoja erotusosamäärälle lauseen 34 mukaisesti. (Viholainen, 2006.)

Muita differentiaali- ja integraalilaskennan tehtävien tekoa vaikeuttavia asioita on havaittu olevan esimerkiksi se, että opiskelijat eivät osaa jakaa lausekkeitä tekijöihin ja se, ettei lauseketta osata muokata yksinkertaisempaan muotoon ennen varsinaisen ratkaisun aloittamista, mikä saattaisi helpottaa ratkaisun tekemistä (Zulu & Nalube, 2020). Myös murtoluvun lisäämisessä kokonaislukuun ja määrittelyjoukon merkityksen ymmärtämisessä on havaittu olevan hankaluuksia (Tarmizi, 2010).

3 Tutkimuksen metodit

3.1 Tutkimuskysymykset ja aineisto

Tässä tutkimuksessa selvitetään, millaisia virheitä tehdään pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta koskevissa tehtävissä ja millaisia virhekäsityksiä funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyen pitkän matematiikan ylioppilaskokeeseen osallistuneilla on. Tutkimuskysymykset ovat

1. Minkälaisia virheitä pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa tehdään tehtävissä, joissa käsitellään funktioiden jatkuvuutta ja derivoituvuutta?
2. Minkälaisia virhekäsityksiä funktioiden jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyen on olemassa kokelaiden pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävien ratkaisujen perusteella?

Lisäksi tutkimustulosten avulla pohditaan sitä, miten lukion opetuksen avulla voisi vähentää funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvien virhekäsitysten muodostumista.

Tutkimuksen aineisto koostuu kolmesta pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa vuosina 2019–2022 esiintyneiden tehtävien ylioppilaskokelaisten ratkaisuksista. Ratkaisut ovat peräisin Ylioppilastutkintolautakunnan antamasta korpusaineistosta. Jokaiseen tehtävään on valittu satunnaisesti sadan kokelaan ratkaisut. Ratkaisujen yhteyteen on liitetty kokelaan pitkän matematiikan ylioppilaskokeista saama arvosana.

Valitut kolme tehtävää valikoituivat analysoitaviksi, koska ne ovat ainoita vuosina 2019–2022 matematiikan ylioppilaskokeissa esiintyneitä tehtäviä, joissa tulee osoittaa funktion jatkuvuus ja/tai derivoituvuus tai joissa muuten testataan kokelaan ymmärrystä funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden käsitteistä. Tehtävistä kevään 2021 tehtävä 9 ja kevään 2022 tehtävä 8 ovat kokeen B1-osasta ja syksyn 2020 tehtävä 10 kokeen B2-osasta.

3.2 Analyysimenetelmästä ja sen valinnasta

Tämä tutkimus on muodoltaan laadullista. Erona kvantitatiiviseen tutkimukseen on muun muassa se, että aineistoa kuvataan muillakin tavoin kuin numeraalisesti (Eskola & Suoranta, 1998). Laadullisessa tutkimuksessa muun muassa aineisto on tekstimuotoista, aineistoa voidaan analysoida aineistolähtöisesti eli teoriaa rakennetaan aineistosta lähtien ja tutkimukseen liittyy hypoteesittomuus eli tutkijalla ei tulisi olla oletuksia tutkimuksen tuloksista tai itse tutkimuskohteesta (Eskola & Suoranta, 1998).

Eskola (2001, 2007) esittää laadullisen analyysin muodoiksi seuraavaa jaottelua: aineistolähtöinen, teoriaohjaava ja teorialähtöinen analyysi. Aineistolähtöisessä analyysissä analyysiyksiköt valitaan tutkimusaineistosta siten, että ne sopivat tutkimuksen tarkoitukseen. Tässä analyysitavassa analyysiyksiköt eivät siis ole ennakkoon mietittyjä, vaan aineisto ohjaa analyysiyksiköiden valinnassa. Teoriaohjaavassa analyysissäkin analyysiyksiköt valitaan aineiston pohjalta, mutta analyysiyksiköiden valinnassa otetaan huomioon myös aikaisempi tieto. Teorialähtöisessä analyysissä on kyse jonkin olemassa olevan tiedon tai teorian testaamisesta, jolloin analyysiyksiköiden voi ajatella muotoutuvan pikemminkin olemassa olevan tiedon kuin itse aineiston pohjalta. (Sarajärvi & Tuomi, 2017.)

Sisällönanalyysi on objektiivinen ja systemaattinen analyysimenetelmä. Se on tekstianalyysiä, jonka avulla pyritään järjestämään aineisto tiiviiseen muotoon kuitenkin niin, ettei aineiston sisältämää informaatiota kadotettaisi. (Sarajärvi & Tuomi, 2017.)

Aineistolähtöinen sisällönanalyysi on siis tekstianalyysiä, jossa analyysiyksiköt valikoituvat pelkästään aineiston pohjalta, ja jossa aineistoa pelkistetään ja luokitellaan. Tutkittavasta aineistosta karsitaan pois kaikki sellainen sisältö, joka ei ole tutkimuksen kannalta relevanttia. Aineistolähtöinen sisällönanalyysi voidaan Milesin ja Hubermanin (1994) mukaan jakaa kolmeen vaiheeseen: pelkistämiseen, klusterointiin ja abstrahointiin. (Sarajärvi & Tuomi, 2017.)

Pelkistämisessä keskeinen sisältö listataan esimerkiksi allekkain erilliseen tiedostoon. Klusteroinnissa ryhmitellään pelkistettyjä ilmauksia alaluokkiin. Alaluokista taas vastaavasti muodostetaan yläluokkia ja yläluokista edelleen pääluokkia. Pääluokista voidaan edelleen muodostaa yhdistäviä luokkia. Aineistosta riippuu, miten monta eri luokka-astetta on

tarkoituksenmukaista muodostaa. Klusteroinnin jälkeen seuraa aineiston abstrahointi, joka tarkoittaa sitä, että aineiston perusteella pyritään muodostamaan teoreettisia käsitteitä. Klusteroinnin voi katsoa olevan osa abstrahointia. Abstrahoinnin jälkeen aineisto voidaan vielä kvantifioida. Tämä voi tarkoittaa esimerkiksi kunkin alaluokan frekvenssien laskemista. (Sarajärvi & Tuomi, 2017.)

Tämä tutkimus toteutetaan laadullisena tutkimuksena, koska aineistoa halutaan kuvata muutenkin kuin numeraalisesti. Esimerkiksi aineistosta esiin nousevia erilaisia ratkaisutapoja halutaan tuoda sanallisesti esiin tuloksissa. Koska tässä tutkimuksessa halutaan selvittää, mitä virheitä yleisimmin tehdään funktion jatkuvuuden tai derivoituvuuden tarkasteluun liittyvissä tehtävissä nimenomaan ylioppilaskirjoituksissa, aineistolähtöinen analyysi on paras vaihtoehto laadullisen analyysin muodoista. Teorialähtöinen analyysi ei tule kysymykseen, koska tässä tutkimuksessa ei haluta testata aikaisempien tietojen tai teorioiden paikkansapitävyyttä, vaan tutkia puhtaasti aineistosta löytyviä virheitä ja virhekesityksiä. Tutkimus voitaisiin toki myös toteuttaa luomalla virheluokat etukäteen aikaisemman kirjallisuuden pohjalta ja toteuttaa analyysi teoriaohjautuvasti, mutta tällöin analyysin ulkopuolelle saattaisi jäädä sellaisia virheluokkia, joita ei aikaisemmissa funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virhekesityksiä koskevissa tutkimuksissa ole havaittu. Toisaalta myös jokin sellainen virheluokka, jota aikaisemman tutkimuksen perusteella ei ole pidetty yleisenä ja saattaisi täten jäädä huomiotta, saattaisi ylioppilaskirjoitusten kontekstissa ilmetä yleisenä ja siten tutkimuksen kannalta merkittävänä. Koska teoriaohjautuvan tai teorialähtöisen analyysin voi siis katsoa mahdollisesti heikentävän tutkimuksen tulosten tarkkuutta tai edustavuutta, on aineistolähtöinen analyysi paras tapa analysoida aineistoa tässä tutkimuksessa.

Aineistolähtöinen sisällönanalyysi sopii siis tässä tutkimuksessa käytettäväksi analysointitavaksi, koska aineiston sisältämä tutkimuksen kannalta keskeinen sisältö halutaan saada aineistolähtöisesti mahdollisimman tiiviiseen ja selkeään muotoon aineiston sisältämää informaatiota kadottamatta. Jotta tutkimuskysymysten kannalta keskeisiä johtopäätöksiä saataisiin tehtyä, jatketaan aineistolähtöistä sisällönanalyysiä tässä tutkimuksessa vielä kvantifioimalla aineisto. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisen tehtävän kohdalla lasketaan kunkin virheluokan ja pääluokan frekvenssit. Näin saadaan selville yleisimmät virheet, joita jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvissä ylioppilaskirjoitusten tehtävissä tehdään.

3.3 Kuvaus analyysistä

Ennen varsinaista analyysiä luotiin jokaiseen tehtävään malliratkaisut, jotka helpottivat itse analyysin tekemistä. Malliratkaisut mukailevat Ylen sivuilta löytyviä YTL:n laatimia Hyvän vastauksen piirteitä (Ylioppilastutkintolautakunta, 2020, 2021, 2022).

Varsinaisessa aineiston analyysissä kuhunkin tehtävään valikoituneet kokelaiden ratkaisut analysoitiin kaksi kertaa. Ratkaisujen analyysissä tehtiin pelkistämistä ja klusterointia samanaikaisesti: ratkaisuista poimittiin kohdat, jotka olivat virheellisiä, ja luotiin niiden pohjalta virheluokat. Analyysissä käytettiin apuna taulukkolaskentaohjelmaa, johon merkattiin kunkin kokelaan tekemät virheet. Selviä näppäilyvirheitä, joita esiintyi vain yhdessä kohdassa, ei merkattu virheeksi. Ensimmäisellä kerralla luotiin virheluokat sitä mukaan, kun niitä aineistossa huomattiin. Lisäksi merkattiin, jos tehtävä oli jäänyt kesken tai jos tehtävää ei ollut yritetty ollenkaan. Toisella kerralla ratkaisut analysoitiin uudelleen ja tarpeen mukaan muutettiin virheluokkia.

Virheluokkien muodostaminen sujui sitä paremmin ja tehokkaammin, mitä enemmän ratkaisujen analysointia oli tehty. Analysointi aloitettiin kevään 2021 tehtävästä 9, ja jälkikäteen tarkasteltuna huomattiin, kuinka paljon turhia luokkia oli muodostettu. Jo toisen analysoitavan tehtävän eli kevään 2022 tehtävän 8 kohdalla virheluokkien muodostaminen oli huomattavasti edellistä tehtävää tehokkaampaa, ja samaan virheluokkaan saatiin mahdutettua useampia virheitä. Virheluokkia muodostaessa kiinnitettiin jatkuvasti huomiota riittävään tarkkuuteen eli virhettä ei lähdetty väkisin mahduttamaan jo olemassa olevaan virheluokkaan, jos olemassa oleva virheluokka ei kuvannut tarpeeksi hyvin virhettä. Analyysin toisella kerralla monia virheluokkia saatiin poistettua esimerkiksi yhdistämällä kaksi hyvin lähellä toisiaan olevaa virheluokkaa.

Virheluokkien muodostamisen jälkeen siirryttiin abstrahointivaiheeseen eli ryhdyttiin muodostamaan laajempia virheryhmiä virheluokista. Tällöin pyrittiin jaottelemaan virheluokkia isompiin ryhmiin, joille annettiin samantyyppisten virheluokkien muodostamaa joukkoa mahdollisimman hyvin kuvaavat nimet. Esimerkiksi kevään 2021 tehtävän 9 kohdalla yhdeksi virheryhmäksi tuli "Funktion jatkuvuutta ei ole osoitettu jatkuvuuden määritelmän avulla", jolloin kyseiseen virheryhmään kuuluvat esimerkiksi virheluokat "Funktio on jatkuva kohdassa

a , jos sillä on raja-arvo kohdassa a ja "Funktio on jatkuva, kun paloittain määritellyn funktion osafunktioiden arvot ovat samat kohdassa, jossa lauseke muuttuu". Kyseiseen virheryhmään kuuluvat siis kaikki sellaiset virheluokat, jotka johtuivat siitä, että funktion jatkuvuutta ei oltu tarkasteltu jatkuvuuden määritelmän kautta.

3.4 Tehtävänannot ja ratkaisut

Seuraavaksi esitetään malliratkaisut tehtäviin, joihin tehtyjä ratkaisuja analysoidaan tätä tutkimusta varten. Tehtävät, joihin malliratkaisut on laadittu, ovat pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävä 10, kevään 2021 tehtävä 9 ja kevään 2022 tehtävä 8. Malliratkaisut mukailevat Ylen sivuilta löytyviä YTL:n laatimia Hyvän vastauksen piirteitä (Yliopilastutkintolautakunta, 2020, 2021, 2022).

3.4.1 Pitkä matematiikka, syksy 2020, tehtävä 10. Väitteitä

Tehtävänanto

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, merkitse jokaiseen osatehtävän 10.2. väittämään vaihtoehto "En vastaa" ja tyhjennä vastauskentät 10.1. ja 10.3.

10.1. Mikä väite tässä todistetaan?

Oikea vastaus 3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Koska

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) (x - a) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

niin $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. (3 p.)

Vaihtoehdot

- (a) Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a .
- (b) Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a .
- (c) Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a .
- (d) Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a .
- (e) Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a .
- (f) Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin sillä on raja-arvo kohdassa a .
- (g) Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin sillä on raja-arvo kohdassa a .

10.2. Mitkä väitteistä (a)–(g) pätevät yleisesti kaikille funktioille $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. (7 p.)

- (a) Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a .

Pätee.

Ei päde.

En vastaa.

- (b) Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a .

Pätee.

Ei päde.

En vastaa.

- (c) Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a .

Pätee.

Ei päde.

En vastaa.

(d) Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a .

Pätee.

Ei päde.

En vastaa.

(e) Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a .

Pätee.

Ei päde.

En vastaa.

(f) Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin sillä on raja-arvo kohdassa a .

Pätee.

Ei päde.

En vastaa.

(g) Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin sillä on raja-arvo kohdassa a .

Pätee.

Ei päde.

En vastaa.

10.3. Valitse väitteistä (a)–(g) kaksi väärää, ja osoita ne epätosiksi antamalla kummastakin esimerkkifunktio, joka todistaa väitteen vääräksi. Esimerkiksi riittää kummassakin kohdassa pelkkä funktion lauseke. (2 p.)

Ratkaisu

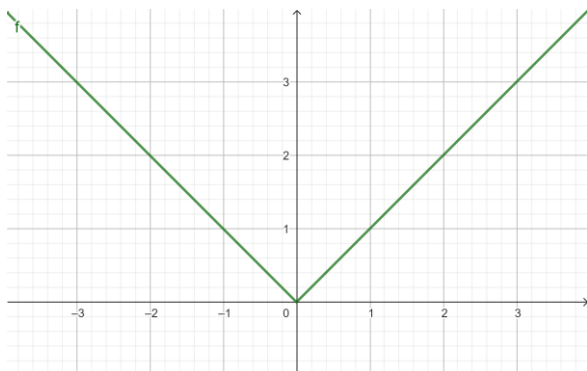
10.1. (b) Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a .

10.2. (a) Ei päde. (b) Pätee. (c) Ei päde. (d) Ei päde. (e) Ei päde. (f) Pätee. (g) Pätee.

10.3.

(a) On annettava esimerkiksi funktio, joka on jatkuva muttei derivoituva kohdassa $x = a$. Esimerkiksi funktio $f(x) = |x|$ on jatkuva muttei derivoituva kohdassa $x = 0$. Funktion f kuvaaja on kuvattuna kuvassa 2.

(c) On annettava esimerkiksi funktio, joka on jatkuva muttei derivoituva kohdassa $x = a$. Esimerkiksi funktio $f(x) = |x|$ ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$, mutta se on jatkuva kyseisessä kohdassa. Funktion f kuvaaja on kuvattuna kuvassa 2.



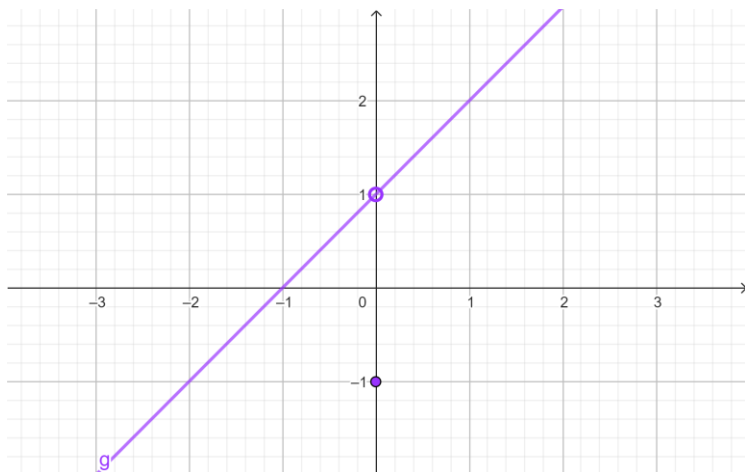
Kuva 2. Syksyn 2020 tehtävän 10 funktion $f(x) = |x|$ kuvaaja. Kuvaajan piirtämistä ei vaadittu tehtävänannossa eli kuva on piirretty vain tilanteen havainnollistamiseksi.

(d) On annettava esimerkiksi funktio, jolla on raja-arvo kohdassa $x = a$, mutta joka ei ole jatkuva kyseisessä kohdassa. Esimerkiksi paloittain määritellyllä funktiolla

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{kun } x \neq 0 \\ -1, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$
 on raja-arvo kohdassa $x = 0$, mutta funktio ei silti ole jatkuva kohdassa $x = 0$. Funktion g kuvaaja on kuvattuna kuvassa 3.

(e) On annettava esimerkiksi funktio, jolla on raja-arvo kohdassa $x = a$, mutta joka ei ole derivoituva kyseisessä kohdassa. Esimerkiksi paloittain määritellyllä funktiolla

$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{kun } x \neq 0 \\ -1, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$ on raja-arvo kohdassa $x = 0$, mutta se ei ole jatkuva eikä täten myöskään derivoituva kohdassa $x = 0$. Funktion g kuvaaja on kuvattuna kuvassa 3.



Kuva 3. Syksyn 2020 tehtävän 10 funktion $g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{kun } x \neq 0 \\ -1, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$ kuvaaja. Kuvaajan piirtämistä ei vaadittu tehtävänannossa eli kuva on piirretty vain tilanteen havainnollistamiseksi.

Tehtävässä vaadittavat taidot

Kaikissa tehtävän alakohdissa täytyy ymmärtää funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden määritelmät sekä ymmärtää jatkuvuuden ja derivoituvuuden välinen suhde.

Tehtävissä 10.1 ja 10.2 vaihtoehdot a), c), d) ja e) rajautuvat automaattisesti pois epätosina väitteinä, jos vain tehtävän tekijä ymmärtää jatkuvuuden ja derivoituvuuden määritelmät sekä niiden välisen suhteen. Lisäksi täytyy ymmärtää ”jos..., niin...”-tyyppisen väitteen idea eli mikä osa väitteestä kertoo sen, mitä oletetaan, ja mikä sen, mitä oletuksesta seuraa.

Tehtävässä 10.3 riittää Hyvän vastauksen piirteiden (Ylioppilastutkintolautakunta, 2020) nojalla antaa esimerkkifunktiot eli vastauksessa ei tarvitse osoittaa, miksi juuri kyseinen funktio osoittaa väitteen vääräksi. Yksinkertaisinta on valita jokin tilanteeseen sopiva paloittain määriteltä funktio. Tehtävää myös helpottaa, jos huomaa, että väitteille a) ja c) sopii sama funktio sekä väitteille d) ja e) sopii sama funktio.

Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 moduulissa MAA6 käsitellään jatkuvuutta avoimella välillä tilanteissa, joissa toispuoleisia raja-arvoja ei tarvitse laskea. Sen sijaan funktion

derivoituvuuden tarkastelu tulee tutuksi vasta moduulissa MAA12. (MAOL, 2019; Opetushallitus, 2019.) Koska tehtävässä ei tarvitse osoittaa, miksi esimerkkifunktio osoittaa väitteen epätodeksi, toispuoleisia raja-arvoja ei tarvitse osata laskea, mutta sen sijaan derivoituvuuden määritelmä täytyy ymmärtää, joten ilman MAA12-moduulin sisältöjen hallitsemista tehtävää voi olla hankala tehdä.

3.4.2 Pitkä matematiikka, kevät 2021, tehtävä 9. Paloittain määritelty funktio

Tehtävänanto

Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{kun } x \leq 0 \\ (ax + 1)^2 + a(1 - a), & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

1. Selvitä, millä parametrin $a \in \mathbb{R}$ arvoilla f on kaikkialla jatkuva. (6 p.)
2. Selvitä, millä parametrin $a \in \mathbb{R}$ arvoilla f on kaikkialla derivoituva. (6 p.)

Ratkaisu

1. Polynomifunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan (ks. lause 24). Lausekkeet $x^3 + 1$ ja $(ax + 1)^2 + a(1 - a)$ ovat polynomeja, joten ne ovat jatkuvia väleillä $x < 0$ ja $x > 0$. Koska funktion f lauseke muuttuu kohdassa $x = 0$, täytyy funktion jatkuvuutta tutkia kyseisessä pisteessä.

Kun $x = 0$, funktio f on jatkuva, jos funktion toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo kohdassa $x = 0$ eli jos $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Määritetään funktion f arvo ja toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 0$.

$$f(0) = 0^3 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 1) = 0^3 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((ax + 1)^2 + a(1 - a)) = (a \cdot 0 + 1)^2 + a(1 - a) = 1 + a - a^2$$

Jotta funktio f olisi jatkuva kohdassa $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

eli

$$1 + a - a^2 = 1$$

$$a - a^2 = 0$$

$$a(1 - a) = 0$$

$$a = 0 \text{ tai } 1 - a = 0$$

$$a = 0 \text{ tai } a = 1.$$

Funktion f kuvaaja on kuvassa 4 parametrin a arvolla 0 ja kuvassa 5 parametrin a arvolla 1.

2. Koska polynomifunktiot ovat derivoituvia määrittelyjoukossaan (ks. lause 40), riittää tutkia funktion f derivoituvuutta kohdassa $x = 0$.

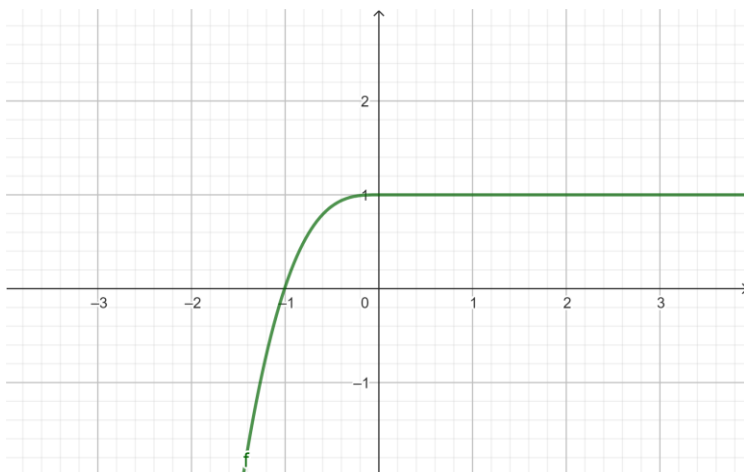
Koska funktion f lauseke muuttuu kohdassa $x = 0$, derivoituvuuden tutkimisessa täytyy tarkastella toispuoleisia derivaattoja kohdassa $x = 0$. Funktio f on derivoituva kohdassa $x = 0$, jos toispuoleiset derivaatat ovat yhtä suuret kyseisessä kohdassa eli jos $f'_-(0) = f'_-(0) = f'_+(0)$. Lisäksi jotta funktio olisi derivoituva, on sen oltava jatkuva, ja koska a -kohdassa huomattiin funktion olevan jatkuva vain silloin, kun $a = 0$ tai $a = 1$, niin funktio on myös mahdollisesti derivoituva vain arvoilla $a = 0$ tai $a = 1$.

Määritetään funktion toispuoleiset derivaatat kohdassa $x = 0$.

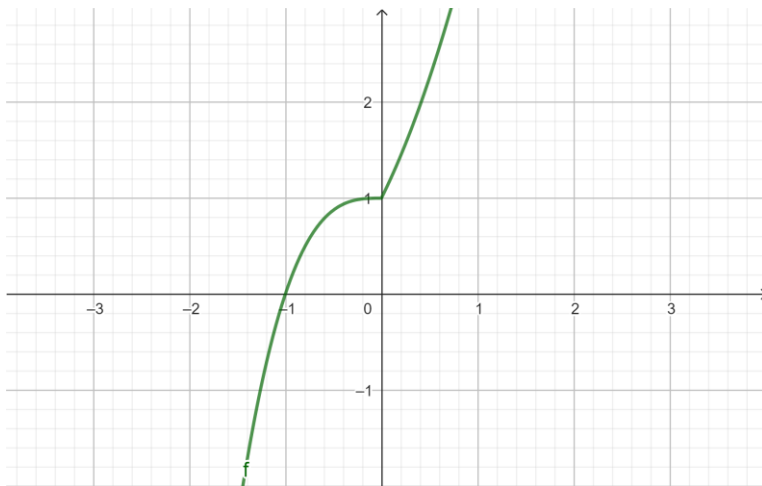
$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 1 - (0^3 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(ax + 1)^2 + a(1 - a) - (0^3 + 1)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2x^2 + 2ax + 1 + a - a^2 - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2x^2 + 2ax + a - a^2}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2x^2 + 2ax}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a(1 - a)}{x} \quad || a = 0 \text{ tai } a = 1 \text{ eli } a(1 - a) = 0 \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} (a^2x + 2a) + 0 \\
&= 2a
\end{aligned}$$

Jotta $f'_-(0) = f'_+(0)$, $2a = 0$ eli $a = 0$. Funktio f on kuvattuna parametrin a arvolla 0 kuvassa 4.



Kuva 4. Kevään 2021 tehtävän 9 funktion f kuvaaja parametrin a arvolla 0. Kuvan ei edellytetty olevan ratkaisussa.



Kuva 5. Kevään 2021 tehtävän 9 funktion f kuvaaja parametrin a arvolla 1. Kuvan ei edellytetty olevan ratkaisussa.

Vastaus

1. Kun $a = 0$ tai $a = 1$, funktio f on kaikkialla jatkuva.
2. Kun $a = 0$, funktio f on kaikkialla derivoituva.

Tehtävässä vaadittavat taidot

Molemmissa tehtävän alakohdissa täytyy ymmärtää funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden määritelmät sekä ymmärtää jatkuvuuden ja derivoituvuuden välinen suhde.

Tehtävässä 9.1 täytyy lisäksi osata osoittaa funktio jatkuvaksi kaikkialla. Ei siis riitä, että osoittaa funktion olevan jatkuva kohdassa $x = 0$, vaan jatkuvuus täytyy perustella koko joukossa $\mathbb{R}$. Tähän riittää, jos muistaa polynomifunktioiden olevan jatkuvia (ks. lause 24). Funktion jatkuvuuden osoittamiseksi kohdassa $x = 0$ täytyy osata määrittää toispuoleiset raja-arvot ja muistaa, että funktion jatkuvuuteen kohdassa ei riitä, että funktiolla on raja-arvo kohdassa, vaan täytyy osoittaa, että funktion raja-arvo ja arvo kohdassa ovat yhtä suuret. Tätä kautta saadaan määritettyä sopivat arvot parametrille a .

Tehtävässä 9.2 täytyy osata osoittaa funktio derivoituvaksi kaikkialla. Ei siis riitä, että osoittaa funktion olevan derivoituva kohdassa $x = 0$, vaan derivoituvuus täytyy perustella koko joukossa $\mathbb{R}$. Tähän riittää, jos muistaa polynomifunktioiden olevan derivoituvia määrittelyjoukossaan (ks. lause 40). Funktion derivoituvuuden osoittamiseksi kohdassa $x = 0$ täytyy osata määrittää toispuoleiset derivaatat ja asettaa ne yhtä suuriksi, jolloin parametrin a arvo

saadaan ratkaistuksi. Toispuoleisten derivaattojen määrittämisessä vaaditaan toispuoleisten erotusosamäärän raja-arvojen määrittämisen sekä erotusosamäärän lausekkeen sieventämisen osaamista. Kun parametrille a on saatu arvo, täytyy vielä varmistaa, että funktio on jatkuva kyseisellä parametrin arvolla.

Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 moduulissa MAA6 käsitellään jatkuvuutta avoimella välillä tilanteissa, joissa toispuoleisia raja-arvoja ei tarvitse laskea. Sekä jatkuvuustarkastelut, joissa tarvitaan toispuoleisia raja-arvoja, että derivoituvuuden tarkastelu tulevat tutuiksi vasta moduulissa MAA12. (MAOL, 2019; Opetushallitus, 2019.) Koska tehtävässä täytyy tutkia paloittain määritellyn funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta, moduulin MAA12 sisällöt täytyy olla hallussa, jotta tehtävän saa tehtyä.

3.4.3 Pitkä matematiikka, kevät 2022, tehtävä 8. Jatkuva mutta ei derivoituva funktio

Tehtävänanto

Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joka ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Perustele erotusosamäärän

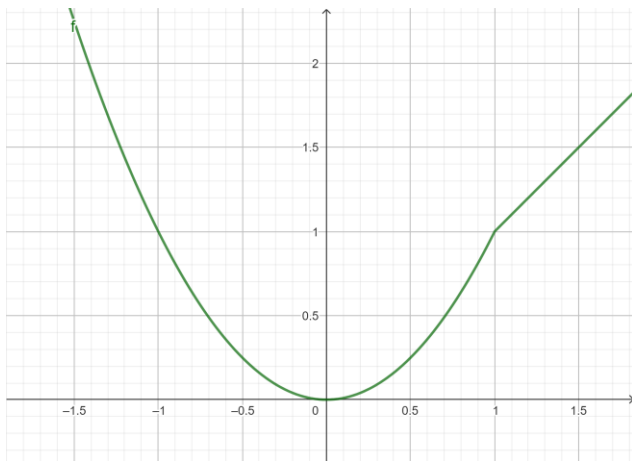
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

avulla, miksi funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Perustele lisäksi funktion jatkuvuus. (12 p.)

Ratkaisu

Valitaan funktioksi esimerkiksi $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \leq 1 \\ x, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$

Funktion kuvaaja on kuvattuna kuvassa 6.



Kuva 6. Kevään 2022 tehtävän 8 esimerkiksi annettu funktion f kuvaaja. Kuvaa ei edellytetty ratkaisussa.

Funktion osafunktiot x^2 ja x ovat polynomifunktioina jatkuvia määrittelyjoukossaan (ks. lause 24). Osoitetaan ensin, että funktio f on jatkuva määrittelyjoukossaan eli myös kohdassa $x = 1$ eli varmistetaan, että $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

Koska $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, niin funktio f on jatkuva kohdassa $x = 1$. Funktio f on siis jatkuva määrittelyjoukossaan.

Osoitetaan sitten, että funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Määritetään funktion toispuoleiset erotusosamäärien raja-arvot kohdassa $x = 1$.

$$f'_-(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$f'_+(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1^2}{x - 1} = 1$$

Koska toispuoleiset erotusosamäärien raja-arvot eivät ole yhtä suuret kohdassa $x = 1$, funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$.

Funktio f on siis jatkuva muttei derivoituva kohdassa $x = 1$.

Tehtävässä vaaditut taidot

Tehtävässä täytyy ymmärtää funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden määritelmät sekä ymmärtää jatkuvuuden ja derivoituvuuden välinen suhde. Tehtävässä täytyy osata osoittaa funktion epäderivoituvuus kohdassa $x = 1$ ja jatkuvuus sekä kohdassa $x = 1$ että myös muualla määrittelyjoukossa. Epäderivoituvuuden osoittamisessa vaaditaan toispuoleisten erotusosamäärän raja-arvojen määrittämisen sekä erotusosamäärän lausekkeen sieventämisen osaamista. Tehtävässä täytyy myös osata valita sopiva esimerkkifunktio. Esimerkiksi paloittain määritelty funktio, jonka lauseke vaihtuu kohdassa $x = 1$, ja jonka osafunktiot ovat polynomifunktioita, sopii tehtävään hyvin, sillä tällöin funktion jatkuvuus muualla kuin kohdassa $x = 1$ on helppo perustella polynomifunktioiden jatkuvuudella määrittelyjoukossaan (ks. lause 24). Tehtävässä täytyy osata osoittaa jatkuvuus toispuoleisten raja-arvojen sekä funktion arvon avulla.

Kuten edellisessä tehtävässä, myös tässä tehtävässä täytyy osata tutkia paloittain määritellyn funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta, joten moduulin MAA12 sisällöt täytyy olla hallussa.

4 Tulokset

Seuraavaksi esitellään tutkimuksen tulokset tehtävittäin eli käydään läpi, millaisia virheitä kussakin tehtävissä tehtiin ja kuinka paljon, ja lisäksi pohditaan, mitkä näistä virheistä voidaan tulkita virhekasityksistä johtuviksi.

4.1 Tulokset tehtäväkohtaisesti

Tässä alaluvussa käydään läpi tehtäväkohtaisesti havaittuja virheitä. Virheet ja niiden määrät ovat nähtävillä taulukoissa, joissa on lisäksi ryhmitelty virheitä sopiviin ryhmiin. Tuloksissa on nähtävillä kaikki sellaiset ratkaisuisissa havaitut virheet, jotka koettiin jatkuvuuden, derivoituvuuden tai muun matematiikan vuoksi merkityksellisiltä tai sellaiset virheet, joita esiintyi useammassa kuin yhdessä ratkaisussa. On hyvä huomata, että yksittäisessä ratkaisussa on voinut olla useita virheitä, ja nämä kaikki virheet on luonnollisesti merkattu ylös, joten virheitä on kokonaisuudessaan enemmän kuin kokelaita. Lisäksi jokaisessa tehtävässä oli ratkaisuja, joita ei ollut tehty loppuun asti, jolloin näissä ratkaisuisissa ei ole ollut mahdollista esiintyä tiettyjä virheitä. Esimerkiksi jos kevään 2021 tehtävän 9 b-kohtaa, jossa tarkasteltiin derivoituvuutta, ei ollut yritetty, ei kokelaan ole ollut mahdollista tehdä virheitä derivoituvuuden tarkastelussa.

Tuloksissa käydään tarkemmin läpi vain ne virheet, joita tehtiin neljä kertaa tai enemmän. Jokaisesta neljä kertaa tai useammin esiintyvistä virheistä annetaan esimerkki tekstissä.

4.1.1 Pitkä matematiikka, syksy 2020, tehtävä 10. Väitteitä

Pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävässä 10 testattiin funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden määritelmien osaamista sekä jatkuvuuden ja derivoituvuuden välisen suhteen ymmärtämistä. Tehtävässä oli kolme alakohtaa, joista ensimmäisessä tuli vastata siihen, minkä väitteen tehtävänannon todistus osoittaa todeksi, toisessa tunnistaa seitsemän väitteen kohdalla, ovatko ne tosia vai eivät ja kolmannessa antaa kahteen edellisessä kohdassa epätodeksi katsomaansa väitteeseen esimerkkifunktiot, jotka osoittavat väitteet epätodeksi.

Kokelaiden tässä tehtävässä tekemät virheet ja niiden määrät ovat ryhmiteltyinä taulukossa 4. Taulukosta on nähtävillä, että yksittäisistä virheluokista saatiin muodostettua kymmenen laajempaa ryhmää, joita ovat muun muassa ”Funktion jatkuvuuden tarkasteluun liittyvät virheet” ja ”Ei ole toimittu tehtävänannon mukaisesti”.

Taulukko 4. Pitkän matematiikan syksyn 2020 tehtävän 10 kokelasratkaisujen virheet luokiteltuina.

Virhe	Lkm
Funktion jatkuvuuden tarkasteluun liittyvät virheet	110
Funktio on jatkuva kohdassa, jos ja vain jos se on derivoituva siinä	42
Funktio on jatkuva kohdassa, jos sillä on raja-arvo kohdassa	33
Funktio voi olla jatkuva kohdassa, vaikkei sillä olisi raja-arvoa kohdassa	19
Väitetty ei-jatkuvaa funktiota jatkuvaksi tai jatkuvaa funktiota ei-jatkuvaksi	14
Jos funktiolla on raja-arvo kohdassa, se ei ole jatkuva kohdassa	2
Funktion derivoituvuuden tarkasteluun liittyvät virheet	104
Jos funktio on jatkuva kohdassa, se on myös derivoituva kyseisessä kohdassa	32
Funktio on derivoituva, jos sillä on raja-arvo kohdassa	24
Funktio voi olla derivoituva myös kohdissa, joissa sillä ei ole raja-arvoa	20
Funktio voi olla kohdassa derivoituva, vaikkei se ole jatkuva siinä	13
Väitetty derivoituvaa funktiota ei-derivoituvaksi	8
Funktio voi olla kohdassa derivoituva, vaikkei sitä ole määritelty kyseisessä kohdassa	2
Jos funktion derivaatta on 0, funktio ei ole derivoituva kohdassa	2
Jos funktiolla on raja-arvo kohdassa, se ei ole derivoituva kohdassa	1
Funktion derivoituvuuden osoittamiseksi riittää, että sen voi derivoida derivoimissäännöillä	1
Funktio on derivoituva, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä	1
Muut	89
Tehtävän 10.1 todistuksen ajateltu osoittavan todeksi sellaisen väitteen, jota se ei oikeasti osoita	66
Väitetty funktioksi suoraa, joka ei ole funktio	10
Ratkaisussa ei mitään oikeaa	5
Paloittain määritellyn funktion merkinnöissä erikoisuuksia	4
Merkintävirhe	2
Ei osata derivoida funktioiden osamäärää	1
Ei osata sieventää erotusosamäärän lauseketta raja-arvoa laskettaessa	1
Ei ole toimittu tehtävänannon mukaisesti	59
Annettu esimerkki vain yhteen väitteeseen tai ei kumpaankaan väitteeseen	36
Kohdassa 10.3 valittu väite, joka on tosi	19
On annettu vain funktion kuvaaja mutta ei lauseketta	4
Raja-arvoihin liittyvät virheet	24

Virhe	Lkm
Väitetty funktiolla olevan raja-arvo kohdassa, vaikkei sillä oikeasti ole	20
Vain kyseisessä kohdassa jatkuvilla funktioilla on raja-arvo olemassa kyseisessä kohdassa	1
Jos toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa mutta erisuuret kohdassa, raja-arvo on olemassa	1
Funktiolla ei voi olla raja-arvoa kohdassa, jossa sen kuvaaja muodostaa terävän kulman	1
Ajateltu, että funktion raja-arvo lasketaan erotusosamäärän raja-arvon kaavalla	1

Yleisimmät virheet, joita pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävässä 10 tehtiin, liittyivät funktion jatkuvuuden tarkasteluun ($n = 110$). Yleisin jatkuvuuden tarkasteluun liittyvä virhe oli, että funktion ajateltiin olevan jatkuva kohdassa a , jos ja vain jos se on derivoituva siinä ($n = 42$). Derivoituvuuden määritelmän eli määritelmän 25 nojalla funktion derivoituvuuden edellytyksenä tarkastelukohdassa on funktion jatkuvuus kyseisessä kohdassa (lause 28). Jatkuvuuden määritelmä eli määritelmä 16 ei kuitenkaan edellytä funktion jatkuvuudelle kohdassa sitä, että funktio olisi derivoituva kyseisessä kohdassa. Näin ollen funktion jatkuvuutta ei ole kaikissa tilanteissa järkevää tarkastella derivoituvuuden kautta, sillä funktio voi olla jatkuva sellaisissa kohdissa, joissa se ei ole derivoituva. Virhe esiintyi erityisesti kohdassa 10.2, jossa oli valittu väite (c) ”Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a ” todeksi väitteeksi. Toiseksi yleisin jatkuvuuden tarkasteluun liittyvä virhe oli se, että ajateltiin funktion olevan jatkuva kohdassa a , jos sillä on raja-arvo kohdassa a ($n = 33$). Jatkuvuuden määritelmän eli määritelmän 16 nojalla funktion raja-arvon olemassaolo tarkastelukohdassa on edellytys mutta ei riittävä ehto funktion jatkuvuudelle kyseisessä kohdassa. Määritelmän 16 nojalla raja-arvon olemassaolon lisäksi funktion arvon on oltava yhtä suuri kuin funktion raja-arvon kyseisessä kohdassa. Virhe ilmeni erityisesti kohdassa 10.2, jossa oli valittu väite (d) ”Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ” todeksi väitteeksi. Kolmanneksi yleisin funktion jatkuvuuteen liittyvä virhe oli se, että funktion ajateltiin voivan olla jatkuva kohdassa a , jossa sillä ei ole raja-arvoa ($n = 19$). Jatkuvuuden määritelmän eli määritelmän 16 nojalla raja-arvon olemassaolo kohdassa on kuitenkin välttämättömyys funktion jatkuvuudelle kyseisessä kohdassa. Virhe ilmeni erityisesti kohdassa 10.2, jossa oli valittu väite (f) ”Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin sillä on raja-arvo kohdassa a ” epätodeksi väitteeksi. Neljänneksi yleisin jatkuvuuteen liittyvä virhe oli se, että kokelas väitti ei-jatkuvaa funktiota jatkuvaksi tai jatkuvaa funktiota ei-jatkuvaksi ($n = 14$). Tämä ilmeni kohdassa 10.3, kun esimerkiksi väitteen (a) ”Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a ” epätodeksi osoittamiseksi oli annettu funktio $f(x) = \ln(|x|)$, jota ei ole määritelty kohdassa 0, eikä se täten ole derivoituva

eikä myöskään jatkuva kyseisessä kohdassa. Kyseisen funktion ajateltiin siis olevan jatkuva kohdassa, koska sen ajateltiin pystyvän osoittamaan väite epätodeksi osoittamalla, että on funktioita, jotka ovat tietyssä kohdassa jatkuvia mutta eivät derivoituvia. Toinen kokelas taas antoi kohdassa 10.3 väitteen (d) ”Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ” epätodeksi osoittavaksi funktioksi polynomifunktion, joka on kaikkialla jatkuva lauseen 24 nojalla, kun väitteen epätodeksi todistamiseksi olisi pitänyt esittää funktio, jolla on raja-arvo kohdassa a , mutta joka ei ole jatkuva siinä. Kokelas siis väitti jatkuvaa funktiota epä-jatkuvaksi funktioksi. Yhteenvetona voisi sanoa, että nämä kaikki jatkuvuuteen liittyvät yleisimmät virheet liittyvät siihen, ettei jatkuvuuden määritelmää ole ymmärretty kunnolla, sillä jatkuvuuden määritelmän (määritelmä 16) nojalla funktio on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun sen raja-arvo kohdassa a on yhtä suuri kuin sen arvo kohdassa a .

Toiseksi yleisimmän laajemman virheluokan muodostivat funktion derivoituvuuden tarkasteluun liittyvät virheet ($n = 104$). Yleisin derivoituvuuteen liittyvä virhe oli, että funktion jatkuvuudesta ajateltiin automaattisesti seuraavan funktion derivoituvuus ($n = 32$). Tämä virhe esiintyi kohdassa 10.2, jossa oli vastattu väitteen (a) ”Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a ” olevan tosi. Virheen tästä tekee se, ettei määritelmän 16 nojalla jatkuvuudesta kohdassa seuraa derivoituvuutta kohdassa, sillä jatkuvuuteen kohdassa riittää, että funktion raja-arvo ja arvo kohdassa ovat yhtä suuria, mutta derivoituvuuteen kohdassa vaaditaan määritelmän 25 nojalla erotusosamäärän raja-arvon olemassaoloa kyseisessä kohdassa, mihin ei riitä funktion raja-arvon ja arvon yhtäsuuruus tarkastelukohdassa.

Toiseksi yleisin derivoituvuuteen liittyvä virhe oli se, että funktion derivoituvuuden ajateltiin johtuvan funktion raja-arvon olemassaolosta ($n = 24$). Derivoituvuuden määritelmän eli määritelmän 25 nojalla funktio on derivoituva tarkastelukohdassa, kun sillä on erotusosamäärän raja-arvo olemassa kyseisessä kohdassa. Pelkkä funktion raja-arvon olemassaolo kohdassa ei siis ole riittävä ehto derivoituvuudelle. Suurin osa tällaisista virheistä tehtiin kohdassa 10.2, jossa oli valittu väite (e) ”Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a ” todeksi. Kolmanneksi yleisin derivoituvuuteen liittyvä virhe oli se, että funktion ajateltiin voivan olla derivoituva myös kohdissa, joissa sillä ei ole raja-arvoa ($n = 20$). Derivoituvuuden määritelmän eli määritelmän 25 sekä lauseen 28 nojalla tietyssä kohdassa derivoituva funktio on automaattisesti jatkuva kyseisessä kohdassa, ja koska jatkuvuuden määritelmän eli määritelmän 16 nojalla yksi edellytys funktion jatkuvuudelle on raja-arvon olemassaolo

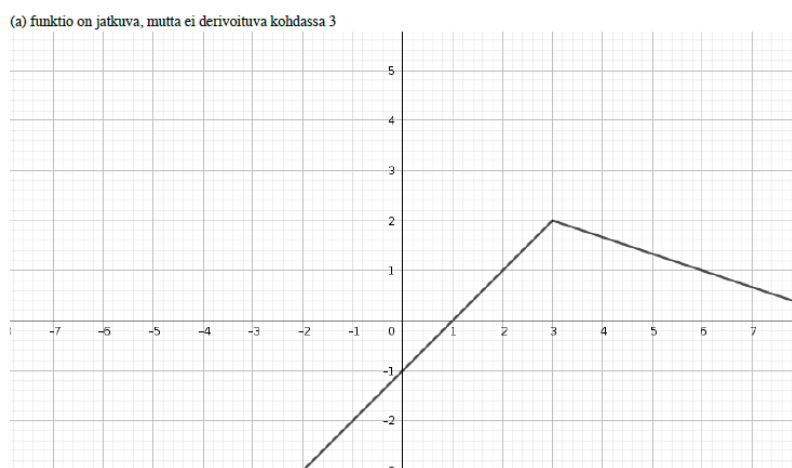
kohdassa, raja-arvon olemassaolo kyseisessä kohdassa on välttämätöntä funktion derivoituvuudelle kohdassa. Tämä virhe ilmeni erityisesti kohdassa 10.2, jossa oli valittu väite (g) ”Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin sillä on raja-arvo kohdassa a ” epätodeksi. Neljänneksi yleisin derivoituvuuteen liittyvä virhe oli se, että funktion ajateltiin voivan olla derivoituva myös kohdissa, joissa se ei ole jatkuva ($n = 13$). Kuitenkin lauseen 28 nojalla kaikki derivoituvat funktiot ovat jatkuvia. Tällaisia virheitä esiintyi erityisesti kohdassa 10.2, jossa oli valittu epätodeksi väitteeksi väite (b) ”Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ”. Viidenneksi yleisin derivoituvuuteen liittyvä virhe oli se, että kokelas väitti derivoituvaa funktiota ei-derivoituvaksi ($n = 8$). Esimerkiksi kohdassa 10.3 oli annettu väitteen (a) ”Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a ” epätodeksi osoittamiseksi funktio $g(x) = 5x^3 + 8x^2 + 3$, joka on polynomifunktiona kaikkialla derivoituva lauseen 40 nojalla eikä täten osoita väitettä epätodeksi.

Kolmanneksi yleisin laajempi virheryhmä oli muut virheet, joita ei pystynyt ryhmittelemään muihin olemassa oleviin ryhmiin ($n = 89$). Tällaisista virheistä yleisin tehtiin kohdassa 10.1, jossa oli valittu väärä väite ($n = 66$) eli jokin muu väite kuin väite (b) ”Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ”. Seuraavaksi yleisin virhe oli se, että oli väitetty funktioksi suoraa, joka ei ole funktio ($n = 10$). Tällöin oli annettu kohdassa 10.3 esimerkifunktioksi jokin y -akselin suuntainen suora, esimerkiksi $x = 0$ tai $x = 1$, joka ei ole funktio. Kolmanneksi yleisin muihin virheisiin luokiteltava virhe oli, ettei ratkaisussa ollut löydettyä juuri mitään oikeaa ($n = 5$). Esimerkki tällaisesta ratkaisusta on, että kohdissa 10.1 ja 10.2, jotka olivat monivalintatehtäviä, oli paljon virheitä, ja kohdassa 10.3 oli vain viiva. Neljänneksi yleisin muu virhe oli paloittain määritellyn funktion merkinnöissä esiintyneet erikoisuudet ($n = 4$). Esimerkki tällaisesta virheestä on merkintä $f(x) = \begin{cases} y = x^2 + 2 & x < 2 \\ y = x & x \geq 2 \end{cases}$, kun oikeaoppisesti funktion lauseke merkittäisiin näin:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

Neljänneksi yleisin laajempi virheryhmä oli se, ettei ollut toimittu tehtävänannon mukaisesti ($n = 59$). Tämän ryhmän yleisin virhe oli se, että oli annettu esimerkki vain yhteen väitteeseen tai ei kumpaankaan väitteeseen ($n = 36$). Tällöin esimerkiksi oli annettu väitteen (f) ”Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin sillä on raja-arvo kohdassa a ” epätodeksi osoittavaksi esimerkifunktioksi $f(x) = x^2 - 4$ eikä ratkaisussa ollut mitään muuta. Toisaalta tähän

virheluokkaan kuuluvat myös ne ratkaisut, jossa oli pelkästään viiva, koska tällöin ei ollut annettu yhtään esimerkkifunktiota. Toiseksi yleisin ryhmän virhe oli, että kohtaan 10.3 oli valittu ainakin yksi väite, joka oli tosi, kun olisi pitänyt valita kaksi epätotta väitettä ($n = 19$). Tällöin kokelas oli siis esimerkiksi valinnut väitteen (b) ”Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ”. Kolmanneksi yleisin virhe oli se, että oli annettu vain funktion kuvaaja mutta ei lauseketta ($n = 4$). Esimerkki tällaisesta ratkaisusta on esitettyä kuvassa 7.



Kuva 7. Esimerkki ratkaisusta, jossa oli annettu vain funktion kuvaaja mutta ei sen lauseketta.

Viidenneksi yleisin laajempi virheryhmä oli erilaiset raja-arvoihin liittyvät virheet ($n = 24$). Yleisin tähän virheryhmään kuuluva virhe oli se, ettei kokelas ollut tunnistanut, ettei tarkasteltavalla funktiolla ole raja-arvoa kohdassa ($n = 20$). Tämä ilmeni erityisesti kohdassa 10.3, jossa oli annettu väitteeseen (d) ”Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ” tai (e) ”Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a ” esimerkkifunktio, jolla ei ole raja-arvoa kohdassa. Tehtävässä olisi pitänyt pikemminkin valita esimerkkifunktio, jolla on raja-arvo kohdassa a , mutta joka ei ole jatkuva (väitteet (d) ja (e)) tai derivoituva (väite (e)) siinä. Esimerkiksi väitteeseen (d) oli annettu eräässä ratkaisussa esimerkkifunktio $g(x) = \begin{cases} x, & 0 > x \\ 1, & 0 \leq x \end{cases}$, jolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 0$ lauseen 15 nojalla.

4.1.2 Pitkä matematiikka, kevät 2021, tehtävä 9. Paloittain määritelty funktio

Pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten kevään 2021 tehtävässä 9 käsiteltiin funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta. Tehtävänannossa oli annettu paloittain määritelty funktio, ja tehtävän ensimmäisessä alakohdassa tuli määrittää funktiossa esiintyvälle parametrille a sellaiset arvot, että funktio on jatkuva kaikkialla. Tehtävän toisessa alakohdassa taas tuli määrittää parametrille a sellaiset arvot, että funktio on derivoituva kaikkialla. Kokelaiden tässä tehtävässä tekemät virheet ja niiden määrät ovat ryhmiteltyinä taulukossa 5.

Taulukko 5. Pitkän matematiikan kevään 2021 tehtävän 9 kokelasratkaisujen virheet lukumäärineen.

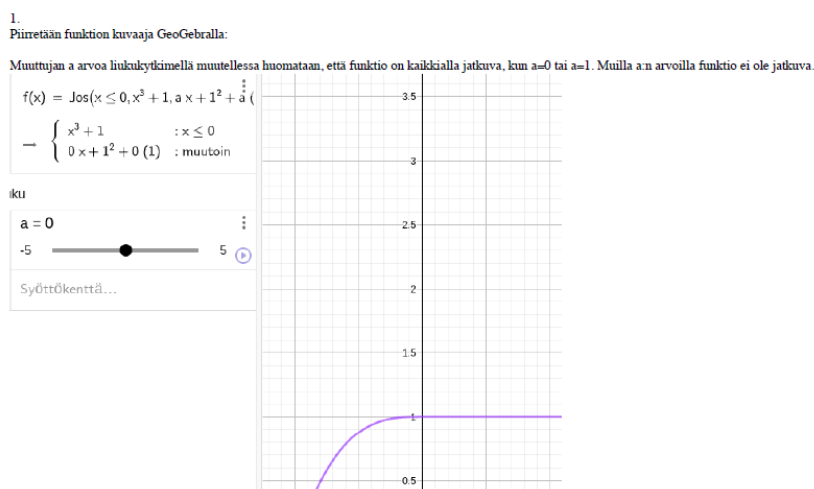
Virhe	Lkm
Tehtävänantoa ei ole noudatettu	149
Ei ole perusteltu jatkuvuutta mahdollisen epäjatkuvuuskohdan ulkopuolella	67
Ei ole perusteltu derivoituvuutta mahdollisen epäderivoituvuuskohdan ulkopuolella	54
Kohtaa 9.2 ei ole yritetty	11
Ei ole määritetty parametrille a arvoa eikä tarkasteltu jatkuvuutta eikä derivoituvuutta	8
Kohta 9.2 jäänyt kesken	5
Kohta 9.1 jäänyt kesken	4
Funktion jatkuvuutta ei ole osoitettu jatkuvuuden määritelmän avulla	47
Funktio on jatkuva kohdassa, jos sillä on raja-arvo kohdassa	27
Katsottu jatkuvuus kuvaajasta tai käytetty jatkuvuuden tarkasteluun GeoGebran liukusäädintä	6
Funktio on jatkuva, kun paloittain määritellyn funktion osafunktioiden arvot ovat samat kohdassa, jossa lauseke muuttuu	5
Funktio on jatkuva kohdassa, jos ja vain jos se on derivoituva kohdassa	4
Jos funktio on määritelty kohdassa, se on jatkuva kohdassa	2
Funktio on jatkuva kaikkialla, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä	2
Paloittain määritellyn funktion jatkuvuus on perusteltu osafunktioiden jatkuvuudella	1
Funktion derivoituvuutta ei ole osoitettu derivoituvuuden määritelmän avulla	43
Laskettu toispuoleisten erotusosamäärän raja-arvojen tai toispuoleisten derivaattojen raja-arvojen sijasta derivaattojen arvot kohdassa	11
Jos funktio on jatkuva kohdassa, se on myös derivoituva kyseisessä kohdassa	10
Tarkasteltu derivoituvuutta kuvaajasta tai GeoGebran liukusäätimellä	10
Jos funktion derivaatta on 0, funktio ei ole derivoituva kohdassa	4
Derivoituvuutta tutkittu pelkästään jatkuvuuden ja aidon monotonisuuden kautta	2
Funktio on derivoituva kohdassa $x = 0$, koska sillä osafunktiolla, jonka avulla funktio on määritelty kohdassa $x = 0$, on derivaatan nollakohta kohdassa $x = 0$	2
Funktio on derivoituva vain, jos derivaatan arvo on sama a :n arvoilla $a = 0$ ja $a = 1$	2

Virhe	Lkm
Päätelty derivoituvuus kaikkialla paloittain määritellyn funktion toisen osafunktion derivoituvuudesta	1
Funktio on derivoituva, jos sillä on nollakohta	1
Erotusosamäärän laskemiseen liittyvät virheet	25
Erotusosamäärän lausekkeeseen sijoitettu väärä arvo tai funktio	17
Raja-arvoa laskiessa ei olla sijoitettu $x:n$ paikalle arvoa	4
Ei ole sievennetty erotusosamäärän lauseketta riittävästi	3
Jos erotusosamäärän lausekkeesta $0/x$ lasketaan raja-arvo, kun $x \rightarrow 0$, raja-arvoa ei ole olemassa	1
Muut virheet	6
Väärä lukuarvo laskutoimituksissa	4
Tarkasteltu jatkuvuutta väärässä kohdassa	2

Yleisimmät virheet, joita pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten kevään 2021 tehtävässä 9 tehtiin, liittyivät siihen, ettei kokelas ollut noudattanut tehtävänantoa kaikilta osin ($n = 149$). Tässä virheryhmässä yleisimmät virheluokat olivat, ettei kokelas perustellut jatkuvuutta mahdollisen epäjatkuvuuskohdan ulkopuolella ($n = 67$) ja ettei kokelas perustellut derivoituvuutta mahdollisen epäderivoituvuuskohdan ulkopuolella ($n = 54$). Nämä virheet esiintyivät erityisesti siten, että jatkuvuutta tai derivoituvuutta tarkasteltiin mahdollisessa epäjatkuvuus- tai epäderivoituvuuskohdassa, mutta ei perusteltu, miksi jatkuvuuden tai derivoituvuuden osoittamiseksi riitti tarkastella epäjatkuvuus- tai epäderivoituvuuskohdalta vaikuttavaa kohtaa eikä tarvinnut kiinnittää huomiota funktion muualla. Esimerkiksi paloittain määritellyn funktion kohdalla tarkasteltiin siis funktion jatkuvuutta kohdassa, jossa funktion lauseke vaihtuu, mutta ratkaisusta puuttui lause siitä, että jos paloittain määritellyn funktion osafunktiot ovat polynomifunktioita, osafunktiot ovat jatkuvia omissa määrittelyjoukoissaan lauseen 24 nojalla, joten riittää tutkia funktion jatkuvuutta lausekkeen vaihtumiskohdassa. Lisäksi tehtävänantoa ei noudatettu siten, ettei kohtaa 9.2 yritetty ($n = 11$) eli kokelas ei määrittänyt, millä parametrin a arvoilla funktio on derivoituva. Neljänneksi yleisin ryhmän virheluokka oli, ettei parametrille a määritetty arvoa eikä tarkasteltu myöskään funktion jatkuvuutta tai derivoituvuutta ($n = 8$). Lisäksi osa kokelaista oli jättänyt joko kohdan 9.1 ($n = 4$) tai kohdan 9.2 ($n = 5$) kesken. Tällöin esimerkiksi kokelas oli alkanut ratkaista erotusosamäärän raja-arvoa, mutta ei ollut saanut tehtyä sitä loppuun asti.

Toiseksi yleisin laajempi virheryhmä oli se, ettei funktion jatkuvuutta osoitettu jatkuvuuden

määritelmän avulla ($n = 47$). Yleisin tähän virheryhmään kuuluva virheluokka oli se, että ajateltiin raja-arvon olemassaolon kohdassa olevan riittävä ehto jatkuvuudelle kohdassa ($n = 27$). Eräässä ratkaisussa esimerkiksi todettiin, että ”Funktion on jatkuva, jos sen toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret”. Määritelmän 16 nojalla jatkuvuuden edellytyksenä on raja-arvon olemassaolo eli toispuoleisten raja-arvojen yhtäsuuruus, mutta lisäksi vaaditaan, että funktion arvo kohdassa on yhtä suuri kuin raja-arvo kohdassa. Toiseksi yleisin virhe oli jatkuvuutta tarkasteltaessa GeoGebran liikusäätimen käyttö tai jatkuvuuden katsominen kuvaajasta parametrin a arvojen löytämiseksi ($n = 6$). Kuvassa 8 on kuvakaappaus ratkaisusta, jossa on käytetty GeoGebran liikusäädintä funktion jatkuvuuden tarkasteluun ja parametrin a arvon selvittämiseen. Seuraavaksi yleisin tähän virheryhmään kuuluva virheluokka oli, että funktion ajateltiin olevan jatkuva, kun paloittain määritellyn funktion osafunktioiden arvot ovat yhtä suuret kohdassa, jossa funktion lauseke muuttuu ($n = 5$). Kuitenkin jatkuvuuden määritelmän (määritelmä 16) nojalla nimenomaan paloittain määritellyn funktion raja-arvon on oltava lausekkeiden vaihtumiskohdassa yhtä suuri funktion arvon kanssa. Eräässä ratkaisussa esimerkiksi väitettiin, että ”Funktio on kaikkialla jatkuva, kun funktion molemmat puolet saavat saman arvon”, ja kyseisessä ratkaisussa laskettiin lausekkeiden $x^3 + 1$ ja $(ax + 1)^2 + a(1 - a)$ arvot kohdassa $x = 0$, jossa paloittain määritellyn funktion lauseke vaihtuu toiseksi. Melko yleinen virhe oli myös ajatus, että jatkuva funktio on aina derivoituva ($n = 4$). Jatkuvuus ei kuitenkaan ole määritelmän 25 nojalla riittävä ehto funktion derivoituvuudelle. Virhe ilmeni sekä erotusosamäärän raja-arvojen tutkimisena jatkuvuutta tarkasteltaessa että esimerkiksi seuraavanlaisesta lauseesta: ”jotta funktio a on kaikkialla jatkuva on sen oltava myös derivoituva”.



Kuva 8. Ratkaisu, jossa on käytetty GeoGebran liikusäädinominaisuutta funktion jatkuvuuden tarkasteluun ja parametrin a arvon selvittämiseen.

Kolmanneksi yleisin laajempi virheryhmä oli se, että funktion derivoituvuutta ei osoitettu derivoituvuuden määritelmän eli erotusosamäärän raja-arvon avulla ($n = 43$). Tällaisista virheistä yleisin oli se, että derivoituvuuden tarkastelussa laskettiin pelkästään derivaattafunktioiden arvot tarkasteltavassa kohdassa ($n = 11$). Esimerkki tällaisesta ratkaisusta on seuraavaksi.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{kun } x \leq 0 \\ (ax + 1)^2 + a(1 - a), & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

$$D(x^3 + 1) = 3x^2$$

$$D(0 \cdot x + 1)^2 + 0(1 - 0) = 0$$

$$D(x + 1)^2 + 1(1 - 1) = 2x + 2$$

ei ole derivoituva, kun $a=1$

ainoa, milloin on derivoituva $a=0$

Seuraavaksi yleisimpiä tähän virheryhmään kuuluvia virheitä oli se, että ajateltiin, että jos funktio on jatkuva, se on myös derivoituva ($n = 10$). Esimerkiksi eräässä ratkaisussa on virke ”Funktio f on jatkuva a :n arvolla 0, jolloin se on myös silloin derivoituva” eli derivoituvuuden ajatellaan automaattisesti seuraavan jatkuvuudesta. Yhtä yleinen virhe edellisen kanssa oli se, että derivoituvuutta tarkasteltiin pelkästään kuvaajasta tai GeoGebran liukusäätimen avulla ($n = 10$). Tästä esimerkkinä on eräs ratkaisu, jossa lukee ”Havaitaan, että kun $a=1$, funktion kuvaaja muodostaa kulmikkaan muodon kohdassa $x=0$. Tällöin funktio ei ole derivoituva kohdassa $x=0$.” Seuraavaksi yleisin virhe oli, että ajateltiin, että funktio ei ole derivoituva, jos sen derivaataksi tulee luku 0 ($n = 4$). Kuitenkin määritelmän 25 nojalla myös tällainen funktio on derivoituva, koska luku 0 on reaalilukuna hyväksyttävä tulos erotusosamäärän raja-arvoksi. Virhe ilmenee esimerkiksi eräästä ratkaisusta, jossa lukee ” a :n arvolla nolla funktion vasen puoli on x -akselin suuntainen suora joten se ei ole kaikkialla derivoituva”.

Viidenneksi yleisin laajempi virheryhmä oli erotusosamäärän laskemiseen liittyvät virheet ($n = 25$). Ryhmän yleisin virhe oli, että erotusosamäärän lausekkeeseen sijoitettiin väärä arvo tai funktio ($n = 17$). Tällöin kokelas oli esimerkiksi käyttänyt väärää arvoa funktiolle f kohdassa $x = 0$ ($f(0)$), sijoittanut muuttujan x paikalle muuttujan a eikä lukua 0 tai sijoittanut sekä oikean- että vasemmanpuoleista erotusosamäärän raja-arvoa laskiessaan $f(x)$:n paikalle saman funktion paloittain määritellyn funktion tapauksessa. Toiseksi yleisin tähän ryhmään

kuuluva virhe oli, että erotusosamäärän raja-arvoa ei laskettu loppuun asti, sillä x :n paikalle ei sijoitettu mitään arvoa ($n = 4$). Eräässä ratkaisussa oli esimerkiksi saatu

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - 1 - 1}{x - 0} = \frac{x^3 - 2}{x}$, ja jätetty vasemmanpuoleisen erotusosamäärän raja-arvon laskeminen tähän.

Kuudenneksi yleisin laajempi virheryhmä oli muiksi virheiksi luokitellut virheet, joita ei saanut mielekkäästi muihin virheryhmiin sijoitettua ($n = 6$). Yleisin tähän virheryhmään kuuluva virhe oli väärän lukuarvon käyttö laskutoimituksissa ($n = 4$). Esimerkiksi eräässä ratkaisussa oli laskettu oikeanpuoleinen raja-arvo, kun $x \rightarrow 1^+$, vaikka olisi pitänyt laskea oikeanpuoleinen raja-arvo, kun $x \rightarrow 0^+$.

4.1.3 Pitkä matematiikka, kevät 2022, tehtävä 8. Jatkuva mutta ei derivoituva funktio

Pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten kevään 2022 tehtävässä 8 tuli antaa koko reaali-joukossa jatkuva esimerkkifunktio, joka ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Funktion derivoitumattomuus kohdassa $x = 1$ sekä jatkuvuus tuli perustella. Kokelaiden tässä tehtävässä tekemät virheet ja niiden määrät ovat ryhmiteltyinä taulukossa 6.

Taulukko 6. Pitkän matematiikan kevään 2022 tehtävän 8 kokelasratkaisujen virheet lukumäärineen.

Virhe	Lkm
Ei ole toimittu tehtävänannon mukaisesti	114
Ei ole perusteltu, miksi funktio on jatkuva muualla kuin mahdollisessa epäjatkuvuuskohdassa	60
Ratkaisussa ei ole osoitettu jatkuvuutta kohdassa $x = 1$	19
Ei ole perusteltu epäderivoituvuutta mitenkään	15
Annettu funktio on derivoituva kohdassa $x = 1$	12
Annettua funktiota ei ole määritelty kohdassa $x = 1$	3
Annettua funktiota ei ole määritelty kokonaisuudessaan väleillä $]-\infty, 1[$ tai $]1, \infty[$	3
Annettu funktioksi $x = 1$, joka ei ole funktio	1
Annettu funktio, joka ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$	1
Erotusosamäärän laskemiseen liittyvät virheet	44
Laskettaessa arvoa $f(1)$ on sijoitettu luku 1 väärään funktioon	25
Ei ole sievennetty erotusosamäärän lauseketta riittävästi	13
Erotusosamäärän määrittämisessä merkittäviä virheitä	4
Erotusosamäärän lausekkeita ei osata muodostaa paloittain määritellyille funktioille	2
Funktion jatkuvuutta ei ole osoitettu jatkuvuuden määritelmän avulla	34

Virhe	Lkm
Funktio on jatkuva kohdassa, jos sillä on raja-arvo kohdassa	13
Jos funktio on määritelty kohdassa, se on jatkuva kohdassa	5
Funktio on jatkuva kohdassa, jos ja vain jos se on derivoituva kohdassa	3
Funktio on jatkuva, kun funktio ei katkea missään kohdassa	2
Katsottu jatkuvuus kuvaajasta	2
Jatkuvuutta tarkasteltaessa on laskettu vain toinen toispuoleisista raja-arvoista ja funktion arvo	2
Derivoituva funktio on jatkuva derivaatan nollakohdissa tai funktion päätepisteissä	1
Funktio on jatkuva, jos sillä on maksimi- ja minimiarvot	1
Funktio on jatkuva, kun kaikki sen pisteet toteuttavat sen yhtälön	1
Funktio on jatkuva, kun funktio on aidosti kasvava ja saa kunkin arvon vain kerran	1
Funktio voi olla jatkuva kohdassa, vaikkei sillä olisi raja-arvoa kohdassa	1
Funktio on jatkuva, koska molemmat osafunktiot kohtaavat $x = 1$ ympärillä	1
Yhdistetty funktio on jatkuva, jos ulkofunktio on aidosti kasvava ja saa jokaisen arvon vain kerran	1
Epäderivoituvuuden osoittamiseen ei ole käytetty derivoituvuuden määritelmää	30
On tiedetty derivoituvuuden määritelmä, mutta ei ole osattu osoittaa epäderivoituvuutta sen avulla	14
Jos funktion derivaatta on 0, funktio ei ole derivoituva kohdassa	5
Tutkittu erotusosamäärää, mutta ei erotusosamäärän raja-arvoa	4
Lukua 0 ei voida derivoida	2
Derivoituvuutta yritetty osoittaa funktion toispuoleisten raja-arvojen kautta	1
Funktion derivoituvuuden osoittamiseksi riittää, että sen voi derivoida derivoimissäännöillä	1
Funktio on derivoituva, jos sillä on raja-arvo kohdassa	1
Tarkasteltu derivoituvuutta pelkästään kuvaajasta	1
Laskettu toispuoleisten erotusosamäärän raja-arvojen tai toispuoleisten derivaattojen raja-arvojen sijasta derivaattojen arvot kohdassa	1
Raja-arvon laskemiseen liittyvät virheet	7
Laskettu oikeanpuoleinen raja-arvo vasemmanpuoleisena ja toisin päin	2
Ei osata laskea toispuoleisia raja-arvoja	1
Raja-arvot katsottu funktion kuvaajasta	1
Funktiolla on raja-arvo olemassa, jos sen toispuoleisista raja-arvoista tulee kummastakin ääretön	1
Raja-arvoa ei voi laskea, jos erotusosamäärän lausekkeesta tulee vakio	1
Ei osata merkata toispuoleista raja-arvoa oikein (ei merkattu etumerkkiä)	1

Yleisimmät virheet, joita pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten kevään 2022 tehtävässä 8 tehtiin, liittyivät siihen, ettei tehtävänantoa noudatettu ($n = 114$). Yleisin tähän virheryhmään kuuluva virhe oli, ettei perusteltu, miksi funktio on jatkuva muualla kuin mahdollisessa

epäjatkuvuuskohdassa ($n = 60$). Esimerkiksi paloittain määritellyn funktion kohdalla olisi riittänyt mainita, että koska paloittain määritellyn funktion osafunktiot ovat polynomifunktioina jatkuvia määrittelyjoukossaan lauseen 24 nojalla, paloittain määritelty funktio on jatkuva muualla paitsi mahdollisesti kohdassa, jossa funktion lauseke vaihtuu. Esimerkiksi eräässä ratkaisussa luki ”Tutkitaan, onko funktio jatkuva kohdassa $x=1$ ”, jonka jälkeen kokelas on laskenut funktion arvon sekä toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 1$ ja päättellyt tästä, että funktio on jatkuva. Kokelas oli ajatellut, että jatkuvuuden osoittamiseksi kaikkialla riittää, että tutkitaan funktion jatkuvuutta kohdassa, jossa funktion lauseke vaihtuu. Toiseksi yleisin tähän virheryhmään kuuluva virhe oli, ettei ratkaisussa osoitettu jatkuvuutta kohdassa $x = 1$ ($n = 19$). Seuraavana on eräs tehtävään tehty ratkaisu kokonaisuudessaan.

”Lasketaan

$$f(1) = \frac{f(1) - f(1)}{1 - 1}$$

$$= 0$$

Lukua 0 ei voi derivoida.”

Kolmanneksi yleisin virhe, joka liittyi tehtävänannon puutteelliseen noudattamiseen, liittyi epäderivoituvuuden puuttuvaan perusteluun ($n = 15$). Seuraavaksi on lyhyt ote erästä ratkaisusta, jossa ei ole kunnolla perusteltu epäderivoituvuutta kohdassa $x = 1$.

$$"Df(a) = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Jotta funktio olisi derivoituva kohdassa $x=1$, täytyisi sillä olla raja-arvo kohdassa $x=1$.”

Seuraavaksi ratkaisussa edetäänkin funktion jatkuvuuden tarkasteluun. On toki totta, että olakseen derivoituva kohdassa a funktiolla on oltava raja-arvo kyseisessä kohdassa, mutta se ei suinkaan ole riittävä ehto derivoituvuudelle. Lisäksi ratkaisussa ei missään kohtaa osoiteta, miksi funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 1$, mikä on kokelaan mukaan derivoituvuuden ehto.

Neljänneksi yleisin virhe tehtävänannon puutteelliseen noudattamiseen liittyen oli se, että annettu esimerkkifunktio oli derivoituva kohdassa $x = 1$ ($n = 12$), kun sen olisi pitänyt olla epäderivoituva kyseisessä kohdassa. Eräässä ratkaisussa esimerkkifunktioksi oli annettu $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, joka on polynomifunktiona derivoituva koko reaalijoukossa lauseen 40

nojalla eli myös kohdassa $x = 1$. Eräässä toisessa ratkaisussa kohdassa $x = 1$ epäderivoituvaksi esimerkkifunktioksi oli annettu todellisuudessa kyseisessä kohdassa derivoituva funktio $f(x) = e^x$.

Seuraavaksi yleisin laajempi virheryhmä oli erotusosamäärän laskemiseen liittyvät virheet ($n = 44$). Tästä virheryhmästä yleisin virhe oli, että laskettaessa arvoa $f(1)$ sijoitettiin luku 1 väärään funktioon ($n = 25$). Eräässä ratkaisussa esimerkkifunktiona oli

$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{kun } x \geq 1 \\ -x + 1, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$, mutta oikeanpuoleinen derivaatta on laskettu laskutoimituksella $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1-(1-1)}{x-1} \right)$ ja vasemmanpuoleinen derivaatta $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-x+1-(-1+1)}{x-1} \right)$, kun määrittämisen 27 nojalla erotusosamäärän lauseke on muotoa $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ kohdassa $x = 1$. Toiseksi yleisin kyseiseen ryhmään kuuluva virhe oli se, ettei erotusosamäärää sievennetty riittävästi ennen arvon $x = 1$ sijoittamista funktion lausekkeeseen ($n = 13$). Tällaisesta virheestä esimerkkinä on

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1| - |1 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

ei määritelty koska nimittäjä on 0."

Kolmanneksi yleisin erotusosamäärän laskemiseen liittyvä virhe oli erotusosamäärän määrittämisessä esiintyneet merkittävät virheet, joita ei voinut sisällyttää kahteen edellä mainittuun virheluokkaan ($n = 4$). Tällaisesta virheestä esimerkki on, että erotusosamäärän lausekkeeseen sijoitettiin sekä muuttujan x että muuttujan x_0 paikalle luku 1 eli $\frac{f(1)-f(1)}{1-1}$, kun määrittämisen 27 nojalla erotusosamäärän lausekkeeseen sijoitetaan vain muuttujan x_0 paikalle luku 1: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Kolmanneksi yleisin laajempi virheryhmä oli funktion jatkuvuuden osoittaminen jollain muulla tavoin kuin määritelmän avulla ($n = 34$). Yleisin tämän ryhmän virhe oli, että ajateltiin funktion olevan jatkuva kohdassa a , jos sillä on raja-arvo kyseisessä kohdassa ($n = 13$). Funktion jatkuvuuden edellytyksenä on raja-arvon olemassaolo, mutta sen lisäksi raja-arvon on oltava yhtä suuri kuin funktion arvo. Tällaisen virheen sisältävästä ratkaisusta on osa seuraavaksi esitettynä.

"Tutkitaan ensin funktion arvo, kun tullaan oikealta kohti $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1$$

$$1 - 1$$

$$= 0$$

Tutkitaan funktion arvo, kun tullaan vasemmalta kohti $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -x + 1$$

$$-1 + 1$$

$$= 0$$

Molemmat osapuolet saavat samat arvot kohdassa $x=1$, joten se on jatkuva."

Toiseksi yleisin funktion jatkuvuuden osoittamiseen liittynyt virhe oli se, että ajateltiin funktion olevan jatkuva kaikkialla, missä se on määritelty ($n = 5$). Jatkuvuuden määritelmän 16 nojalla ei kuitenkaan riitä, että funktio on määritelty kohdassa. Esimerkiksi eräässä ratkaisussa väitettiin, että "Funktioilla $f(x) = (x - 1)^2$ ei ole mitään määrittelyehtoja, sillä funktiossa ei ole esimerkiksi rationaalilukuja tai neliöjuuria, jotka voisivat aiheuttaa ehtoja sille, milloin funktio on määritelty. Näin ollen funktio on määritelty ja jatkuva kaikilla x :n arvoilla".

Neljänneksi yleisin laajempi virheryhmä oli epäderivoituvuuden osoittaminen jotenkin muuten kuin derivoituvuuden määritelmän avulla ($n = 30$). Tästä virheryhmästä yleisin virhe on se, ettei derivoituvuuden määritelmää osattu käyttää epäderivoituvuuden osoittamiseen, vaikka derivoituvuuden määritelmä tiedettiin ($n = 14$). Esimerkki tällaisesta virheestä on ratkaisu, jossa on määritetty erotusosamäärän raja-arvo itseisarvofunktiolle, jolle pitäisi määritellä toispuoleiset erotusosamäärän raja-arvot:

$$"f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|x - 1| - |1 - 1|}{1 - 1} = \frac{|x - 1| - |0|}{0}$$

...

Siis funktio $|x - 1|$ ei ole derivoituva kohdassa $x=1$."

Sinällään siis johtopäätös on oikea, ainoastaan tapa, jolla johtopäätös saavutettiin, ei ollut oikea.

Toiseksi yleisin epäderivoituvuuden osoittamiseen käytetty virheellinen perustelu oli se, että jos funktion derivaataksi kohdassa a tulee luku 0, funktio ei ole derivoituva kyseisessä kohdassa ($n = 5$). Tämä ilmenee esimerkiksi ratkaisussa, jossa tehdään seuraava päättely:

”Funktion f derivaatta kohdassa $x=1$ on 0 eli se ei ole derivoituva...”. Kolmanneksi yleisin kyseiseen virheryhmään kuuluva virhe oli se, että määritettiin erotusosamäärä, mutta ei erotusosamäärän raja-arvoa ($n = 4$). Seuraavaksi esitellään osa eräästä ratkaisusta, jossa virhe esiintyi.

”Funktio ei ole derivoituva koska kohtaan $x=1$ ei saada yksikäsitteistä tangenttia perustellaa erotusosamäärän avulla

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\text{eli } f(x) = \begin{cases} 3x - 3, & \text{kun } x \geq 1 \\ -3x + 3, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 3 = 0$$

saadaan

$$\begin{aligned} & \frac{3x - 3 - 0}{x - 1} \\ &= \frac{3x - 3}{x - 1} \\ &= \frac{3(x - 1)}{x - 1} \\ &= 3 \\ & \frac{-3x + 3 - 0}{x - 1} \\ &= \frac{-3x + 3}{x - 1} \\ &= \frac{-3(x - 1)}{x - 1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Viidenneksi yleisin laajempi virheryhmä oli raja-arvon laskemiseen liittyvät virheet ($n = 7$). Tästä virheryhmästä yleisin oli se, että laskettiin oikeanpuoleinen raja-arvo vasemmanpuoleisena ja toisin päin ($n = 2$). Esimerkiksi eräässä ratkaisussa funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{kun } x \geq 1 \\ -(2x - 2), & \text{kun } x < 1 \end{cases} \text{ vasemmanpuoleisen erotusosamäärän lausekkeeksi on määri-}$$

$$\text{tetty } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2x - 2 - (2 \cdot 1 - 2)}{1 - 1} \text{ ja oikeanpuoleisen erotusosamäärän lausekkeeksi}$$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-2x+2-(-2\cdot 1+2)}{1-1}.$$

4.2 Tulosten yhteenveto

Seuraavaksi kootaan tehtäväkohtaisia tuloksia yhteen ja tarkastellaan yleisimpiä virheitä, kun otetaan kaikki tehtävät huomioon. Lisäksi pohditaan, mitkä virheistä saattaisivat johtua virhekäsityksistä, joita kokelailla on ollut.

Vaikka taulukoissa 7, 8, 9 ja 10 ovat kaikki pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 kokelaiden ratkaisuihin tässä tutkimuksessa havaitut virheet, keskitytään tarkemmin käsittelemään yleisimpiä virheitä eli sellaisia virheitä, joita esiintyi tehtävissä vähintään 12 kertaa. Yleisimmät virheet ajatellaan siis tässä tutkimuksessa sellaisiksi virheiksi, joita esiintyi vähintään neljässä prosentissa (4 %) ratkaisuihin. Näiden yleisimpien virheiden osalta pohditaan tarkemmin, mistä virheet saattaisivat johtua ja ovatko ne virhekäsityksistä johtuvia. Tavat, joilla virheet esiintyivät ratkaisuihin, esiteltiin kappaleessa 4.1, joten niitä ei enää tässä kappaleessa tarkastella.

4.2.1 Funktion jatkuvuuteen liittyvät virheet

Seuraavaksi tarkastellaan pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuihin esiintyneitä funktion jatkuvuuteen liittyviä virheitä. Taulukossa 7 on tutkimuksen aineistona olleissa kolmessa tehtävässä esiintyneet funktion jatkuvuuteen liittyvät virheet ja niiden frekvenssit sekä tehtävittäin eriteltynä että yhteenlaskettuna. Joihinkin virheluokkiin on sisällytetty alempi virheluokka, joka näkyy taulukossa haaleampana ja sisennettynä tekstinä. Alempia virheluokkia on luotu sellaisten virheluokkien alle, jotka eivät toistuneet täysin samanlaisina eri tehtäviä varten luoduissa virheluokitteluisissa.

Taulukko 7. Funktion jatkuvuuteen liittyvät havaitut virheet pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuisissa.

Jatkuvuus	S20, t. 10	K21, t. 9	K22, t. 8	Yht.
Ei ole perusteltu jatkuvuutta mahdollisen epäjatkuvuuskohdan ulkopuolella	0	67	60	127
Funktio on jatkuva kohdassa, jos sillä on raja-arvo kohdassa	33	27	13	73
Funktio on jatkuva kohdassa, jos ja vain jos se on derivoituva kohdassa	42	4	3	49
Funktio voi olla jatkuva kohdassa, vaikkei sillä olisi raja-arvoa kohdassa	19	0	1	20
Väitetty ei-jatkovaa funktiota jatkuvaksi tai jatkuvaa funktiota ei-jatkuvaksi	14	0	1	15
Annettu funktio, joka ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$	-	-	1	
Katsottu jatkuvuus kuvaajasta tai käytetty jatkuvuuden tarkasteluun GeoGebran liukusäädintä	0	6	2	8
Katsottu jatkuvuus kuvaajasta	0	0	2	
Jos funktio on määritelty kohdassa, se on jatkuva kohdassa	0	2	5	7
Funktio on jatkuva, kun paloittain määritellyn funktion osafunktioiden arvot ovat samat kohdassa, jossa lauseke muuttuu	0	5	0	5
Jos funktiolla on raja-arvo kohdassa, se ei ole jatkuva kohdassa	2	0	0	2
Funktio on jatkuva kaikkialla, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenävä	0	2	0	2
Funktio on jatkuva, kun funktio ei katkea missään kohdassa	0	0	2	2
Jatkuvuutta tarkasteltaessa on laskettu vain toinen toispuoleisista raja-arvoista ja funktion arvo	0	0	2	2
Paloittain määritellyn funktion jatkuvuus on perusteltu osafunktioiden jatkuvuudella	0	1	0	1
Derivoituva funktio on jatkuva derivaatan nollakohdissa tai funktion päätepisteissä	0	0	1	1
Funktio on jatkuva, jos sillä on maksimi- ja minimiarvot	0	0	1	1
Funktio on jatkuva, kun kaikki sen pisteet toteuttavat sen yhtälön	0	0	1	1
Funktio on jatkuva, kun funktio on aidosti kasvava ja saa kunkin arvon vain kerran	0	0	1	1
Funktio on jatkuva, koska molemmat osafunktiot kohtaavat $x=1$ ympärillä	0	0	1	1
Yhdistetty funktio on jatkuva, jos ulkofunktio on aidosti kasvava ja saa jokaisen arvon vain kerran	0	0	1	1

Jatkuvuuteen liittyvistä virheistä yleisin oli se, ettei perusteltu jatkuvuutta mahdollisen epäjatkuvuuskohdan ulkopuolella ($n = 127$). Tämä virhe saattoi esiintyä joko kevään 2021

tehtävässä 9 ($n = 67$), jossa tarkasteltiin paloittain määriteltyä funktiota, tai kevään 2022 tehtävässä 8 ($n = 60$), jossa kokelas oli saattanut valita paloittain määritellyn esimerkkifunktion. Kevään 2021 tehtävässä 9 pyydettiin selvittämään, millä parametrin a arvoilla funktio on kaikkialla jatkuva eli jatkuva kaikilla reaaliluvuilla, ja kevään 2022 tehtävässä 8 pyydettiin osoittamaan, että funktio on jatkuva eli jatkuva määrittelyjoukossaan, joka on tässä tehtävässä reaalilukujen joukko. Molemmissa tehtävissä tuli siis osoittaa funktion jatkuvuus kaikilla reaaliluvuilla eli ei pelkästään kohdassa, jossa paloittain määritellyn funktion lauseke vaihtuu. Kyseessä lienee ennen kaikkea huolimattomuudesta johtuva virhe eli ei ole muistettu mainita, että jos paloittain määritellyn funktion osafunktiot ovat polynomifunktioita, ne ovat kaikkialla jatkuvia lauseen 24 nojalla.

Toiseksi yleisin jatkuvuuteen liittyvä virhe oli väitteen ”jos funktiolla on raja-arvo kohdassa a , funktio on jatkuva kohdassa a ” olevan tosi ja päätelty siis funktion jatkuvuus tarkastelukohdassa raja-arvon olemassaolosta kyseisessä kohdassa ($n = 73$). Kuten alaluvussa 4.1 kerrottiin, kyseinen virhe ilmeni esimerkiksi siten, että tarkasteltiin ainoastaan raja-arvon olemassaoloa kohdassa ja pääteltiin funktion jatkuvuus kohdassa suoraan siitä. Tämän virheen voisi ajatella johtuvan siis virhekäsityksestä, sillä kuten alaluvussa 4.1.3 annettiin esimerkiksi, kokelas saattoi määrittää toispuoleiset raja-arvot tarkastelukohdassa ja kirjoittaa, että koska toispuoleiset raja-arvot saavat saman arvon tarkastelukohdassa, funktio on jatkuva. Tällöin sama virhe toistui ikään kuin kahteen kertaan, kun ensin määritettiin raja-arvot mutta ei funktion arvoa kohdassa, ja sitten vielä sanallisesti osoitettiin ajatus siitä, että koska raja-arvo on tarkastelukohdassa olemassa, funktio on jatkuva kohdassa.

Kolmanneksi yleisin jatkuvuuteen liittyvä virhe oli ajatus siitä, että väite ”funktio on jatkuva kohdassa a , jos ja vain jos se on derivoituva kohdassa a ” on tosi ($n = 49$). Esimerkiksi kevään 2021 tehtävässä 9, jossa tuli määrittää parametrille a arvo, jolla funktio on jatkuva, ei riittänyt, että etsi parametrille arvot, joilla funktio on derivoituva. Tällöin ei saanut selville kaikkia mahdollisia parametrin a arvoja, joilla funktio on jatkuva. Tällainen virhe vaikuttaisi siltä, että kokelaalla on ollut virhekäsitys, jonka mukaan funktio on jatkuva täsmälleen niissä kohdissa, joissa se on derivoituva. Kuten alaluvussa 4.1.2 kuvattiin, eräässä ratkaisussa väitettiin funktion derivoitavuuden olevan edellytys jatkuvuudelle, jonka jälkeen funktiota alettiin derivoida jatkuvuuden osoittamiseksi. Esimerkiksi tässä ratkaisussa voisi siis sanoa virheen johtuneen nimenomaan virhekäsityksestä, koska virheellinen ajattelu jatkui läpi ratkaisun. Lisäksi

syksyn 2020 tehtävässä 10, jossa tämä virhe esiintyi erityisesti väitteen (c) ”Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a ” merkitsemisellä todeksi, 15 kokelasta 41 kokelaasta eli reilu kolmasosa niistä, jotka olivat valinneet väitteen (c) pitävän paikkaansa, olivat valinneet myös väitteen (a) ”Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a ” pitävän paikkansa. Erityisesti näiden kokelaiden kohdalla voitaisiin siis puhua virhekäsityksestä, sillä jatkuvan funktion ajattelemisen automaattisesti derivoituvana ilmeni useammassa kohdassa näiden kokelaiden ratkaisua. Toisaalta voidaan ajatella myös virheen johtuneen siitä, ettei väitteen (c) merkitystä ymmärretty täysin.

Neljänneksi yleisin jatkuvuuteen liittynyt virhe oli ajatus siitä, että funktio voi olla jatkuva myös sellaisessa kohdassa, jossa funktiolla ei ole raja-arvoa ($n = 20$). Tämä virhe ilmeni erityisesti syksyn 2020 tehtävässä 10, jossa oli valittu väite ”Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin sillä on raja-arvo kohdassa a ” epätodeksi ($n = 19$). Jatkuvuuden määritelmän eli määritelmän 16 nojalla tämä väite kuitenkin pitää paikkansa. On vaikea sanoa, mistä virhe on johtunut eli onko kyseessä esimerkiksi virhekäsitys tai väitteen väärin ymmärtäminen, sillä tehtävässä ei ole toista samankaltaista väitettä, jonka avulla voisi havaita virheen toistuvuutta.

Viidenneksi yleisin jatkuvuuteen liittyvä virhe oli se, että ei-jatkuvaa funktiota väitettiin jatkuvaksi tai jatkuvaa funktiota ei-jatkuvaksi ($n = 15$). Tämä virhe ilmeni erityisesti syksyn 2020 tehtävän 10 kohdassa 10.3, jossa piti antaa esimerkkifunktiot kumoamaan kaksi epätotta väitettä. Kuten alaluvussa 4.1.1 mainittiin, esimerkiksi polynomifunktio annettiin esimerkkifunktioksi sellaiseen väitteeseen, johon olisi pitänyt antaa epäjatkuva funktio väite kumoamaan. Todennäköisesti monen kokelaan kohdalla on kyse virhekäsityksestä, joka koskee funktion jatkuvuutta ja sitä, millaisia epäjatkuvat funktiot ovat. Esimerkiksi eräässä ratkaisussa annettiin väitteet (b) ”Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ” ja (d) ”Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ” epätodeksi osoittaviksi funktioiksi polynomifunktiot, joten jonkinlainen virhekäsitys jatkuvuuteen liittyen ainakin tällä kokelaalla on olemassa.

4.2.2 Funktion derivoituvuuteen liittyvät virheet

Seuraavaksi tarkastellaan pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuisa esiintyneitä funktion derivoituvuuteen liittyviä virheitä. Taulukossa 8 on tutkimuksen aineistona olleissa kolmessa tehtävässä esiintyneet funktion derivoituvuuteen liittyvät virheet ja niiden frekvenssit sekä tehtävittäin eriteltynä että yhteenlaskettuna.

Taulukko 8. Funktion derivoituvuuteen liittyvät havaitut virheet pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuisa.

Derivoituvuus	S20, t. 10	K21, t. 9	K22, t. 8	Yht.
Ei ole perusteltu derivoituvuutta mahdollisen epäderivoituvuuskohdan ulkopuolella	0	54	-	54
Jos funktio on jatkuva kohdassa, se on myös derivoituva kyseisessä kohdassa	32	10	0	42
Funktio on derivoituva, jos sillä on raja-arvo kohdassa	24	0	1	25
Funktio voi olla derivoituva myös kohdissa, joissa sillä ei ole raja-arvoa	20	0	0	20
Väitetty derivoituvaa funktiota ei-derivoituvaksi	8	0	12	20
Annettu funktio on derivoituva kohdassa $x = 1$	-	-	12	
On tiedetty derivoituvuuden määritelmä, mutta ei ole osattu osoittaa epäderivoituvuutta sen avulla	-	-	14	14
Funktio voi olla kohdassa derivoituva, vaikkei se ole jatkuva siinä	13	0	0	13
Laskettu toispuoleisten erotusosamäärän raja-arvojen tai toispuoleisten derivaattojen raja-arvojen sijasta derivaattojen arvot kohdassa	0	11	1	12
Jos funktion derivaatta on 0, funktio ei ole derivoituva kohdassa	2	4	5	11
Tarkasteltu derivoituvuutta kuvaajasta tai GeoGebran liukusäätimellä	0	10	1	11
Tutkittu erotusosamäärää, mutta ei erotusosamäärän raja-arvoa	0	0	4	4
Funktio voi olla derivoituva kohdassa, vaikkei sitä ole määritelty kyseisessä kohdassa	2	0	0	2
Funktion derivoituvuuden osoittamiseksi riittää, että sen voi derivoida derivoimissäännöillä	1	0	1	2
Derivoituvuutta tutkittu pelkästään jatkuvuuden ja aidon monotonisuuden kautta	-	2	0	2
Funktio on derivoituva kohdassa $x = 0$, koska sillä osafunktiolla, jonka avulla funktio on määritelty kohdassa $x = 0$, on derivaatan nollakohta kohdassa $x = 0$	-	2	-	2
Funktio on derivoituva vain, jos derivaatan arvo on sama a:n arvoilla $a = 0$ ja $a = 1$	-	2	-	2
Lukua 0 ei voida derivoida	0	0	2	2

Derivoituvuus	S20, t. 10	K21, t. 9	K22, t. 8	Yht.
Jos funktiolla on raja-arvo kohdassa, se ei ole derivoituva kohdassa	1	0	0	1
Funktio on derivoituva, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä	1	0	0	1
Päätelty derivoituvuus kaikkialla paloittain määritellyn funktion toisen osafunktion derivoituvuudesta	0	1	0	1
Funktio on derivoituva, jos sillä on nollakohta	0	1	0	1
Derivoituvuutta yritetty osoittaa funktion toispuoleisten raja-arvojen kautta	0	0	1	1

Derivoituvuuteen liittyvistä virheistä yleisin oli se, ettei funktion derivoituvuutta perusteltu mahdollisen epäderivoituvuuskohdan ulkopuolella ($n = 54$). Tämä virhe ilmeni kevään 2021 tehtävässä 9, jossa täytyi etsiä parametrille a sellaiset arvot, että funktio on kaikkialla derivoituva eli derivoituva kaikilla reaaliluvuilla. Voisi ajatella, että virhe johtui huolimattomuudesta tai ajattelemattomuudesta, ei siis niinkään sen vuoksi, että kokelaalla olisi ollut virhekäsitys funktion derivoituvuuteen liittyen. Tehtävänannon ilmauksen ”kaikkialla derivoituva” voisi nimittäin ajatella auttavan kokelasta hahmottamaan sitä, että funktion derivoituvuus täytyy osoittaa muuallakin kuin mahdolliselta epäderivoituvuuskohdalta vaikuttavassa kohdassa.

Toiseksi yleisin funktion derivoituvuuteen liittyvä virhe oli väitteen ”Jos funktio on jatkuva kohdassa a , se on myös derivoituva kohdassa a ” mieltäminen todeksi ($n = 42$). Tämän virheen kohdalla voidaan luultavasti puhua kokelailla olevasta virhekäsityksestä, sillä syksyn 2020 tehtävään 10 vastanneista kokelaista 12 niistä 32 kokelaasta, jotka vastasivat väitteen (a) ”Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a ” pitävän paikkansa, vastasivat väitteen (b) ”Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ” olevan epätosi. Näillä kokelailla oli siis ajatus, että funktion jatkuvuudesta seuraa derivoituvuus, mutta derivoituvuudesta ei välttämättä seuraa jatkuvuus. Lisäksi 15 kokelasta 32 kokelaasta, jotka olivat valinneet väitteen (a) pitävän paikkansa, olivat valinneet myös väitteen (c) ”Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a ” pitävän paikkansa. Näillä kokelailla taas oli luultavasti virhekäsitys, jonka mukaan väite ”funktio on jatkuva kohdassa a , jos ja vain jos se on derivoituva kyseisessä kohdassa” pitää paikkansa. Erityisesti näiden kokelaiden kohdalla, jotka olivat merkanneet väitteen (a) paikkansapitävyyden lisäksi joko väitteen (b) tai (c) paikkansapitävyyden väärin, voidaan puhua virhekäsityksestä, joka johtaa ajattelemaan funktion derivoituvuuden seuraavan automaattisesti funktion

jatkuvuudesta.

Kolmanneksi yleisin funktion derivoituvuuteen liittyvä virhe oli se, että ajateltiin funktion raja-arvon olemassaolon tarkastelukohdassa olevan riittävä ehto funktion derivoituvuudelle kyseisessä kohdassa ($n = 25$). Tätä virhettä esiintyi erityisesti syksyn 2020 tehtävässä 10, jossa väite (e) ”Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a ” oli merkattu paikkansapitäväksi. On hankala sanoa, onko kyseessä ollut pelkkä virhe, joka ei toistu ratkaisun edetessä, vai onko kyseessä virhekäsitys. Toisaalta voisi ajatella, että koska 25 kokeilasta 300 kokeilaan otoksesta (noin 8,3 %) oli tehnyt kyseisen virheen, kyseessä olisi virhekäsitys eikä pelkkä moka.

Neljänneksi yleisin funktion derivoituvuuteen liittyvä virhe oli päinvastainen edellisen virheen kanssa eli ajateltiin, että funktio voi olla derivoituva myös kohdissa, joissa sillä ei ole raja-arvoa ($n = 20$). 9 kokeilasta 20 kokeilaasta, jotka olivat vastanneet syksyn 2020 tehtävässä 10 väitteen (g) ”Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin sillä on raja-arvo kohdassa a ” olevan epätosi, olivat vastanneet myös väitteen (f) ”Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin sillä on raja-arvo kohdassa a ” olevan epätosi. Erityisesti näiden kokeilajien kohdalla voidaan puhua virhekäsityksestä, jonka mukaan raja-arvon olemassaolo ei ole välttämätön ehto derivoituvuudelle, sillä kyseinen virhe toistui kahdesti kokeilaan vastattua sekä jatkuvuuden että derivoituvuuden olevan mahdollista myös ilman raja-arvon olemassaoloa. Ennen kaikkea kyseessä lieenee jatkuvuuden määritelmään liittyvä virhekäsitys, sillä raja-arvon olemassaolo on välttämätöntä derivoituvuudelle, koska jatkuvuus on edellytys derivoituvuudelle ja raja-arvon olemassaolo edellytys jatkuvuudelle, mutta kokeilajilla on voinut olla virhekäsitys myös funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden väliseen yhteyteen liittyen.

Yhtä yleinen derivoituvuuteen liittyvä virhe edellisen virheen kanssa oli derivoituvan funktion väittäminen ei-derivoituvaksi ($n = 20$). Tätä virhettä ilmeni erityisesti kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuisissa, joissa annettiin kohdassa $x = 1$ epäderivoituvaksi esimerkkifunktioksi funktio, joka on todellisuudessa derivoituva kyseisessä kohdassa. Esimerkiksi polynomifunktiota väitettiin eräässä ratkaisussa epäderivoituvaksi kohdassa $x = 1$, vaikka polynomifunktiot ovatkin lauseen 40 nojalla derivoituvia kaikkialla. Voisi ajatella, että erityisesti niillä kokeilajilla, jotka väittivät ilmiselvästi kaikkialla derivoituvaa funktioita, kuten polynomifunktiota, epäderivoituvaksi kohdassa $x = 1$, olisi virheen taustalla virhekäsitys siitä, mitä derivoituvuus

tarkoittaa ja millainen on epäderivoituva funktio.

Kuudenneksi yleisin derivoituvuuteen liittyvä virhe oli se, että tiedettiin derivoituvuuden määritelmä, mutta ei osattu osoittaa funktion epäderivoituvuutta sen avulla ($n = 14$). Tätä virhettä ilmeni kevään 2022 tehtävässä 8, jossa tuli osoittaa funktion epäderivoituvuus kohdassa $x = 1$. Kuten alaluvussa 4.1.3 havaittiin, kokelas saattoi mainita derivoituvuuden määritelmän ja lähteä rakentamaan ratkaisua erotusosamäärän lausekkeen avulla, mutta erotusosamäärän raja-arvon laskeminen ei onnistunut, koska ei tajuttu käyttää apuna toispuoleisia erotusosamäärän raja-arvoja. Kyse lienee siis monen kokelaan kohdalla raja-arvoihin ja erotusosamäärään liittyvistä virhekäsityksistä, kuten siitä, että myös paloittain määritellyn funktion erotusosamäärän raja-arvon laskemiseen riittää yksi erotusosamäärän lauseke, eikä toispuoleisia raja-arvoja tarvitse laskea.

Seitsemänneksi yleisimmäksi funktion derivoituvuuteen liittyväksi virheeksi ilmeni se, että ajateltiin funktion voivan olla derivoituva myös kohdissa, joissa se ei ole jatkuva ($n = 13$). Tämä virhe esiintyi erityisesti syksyn 2020 tehtävässä 10, jossa oli valittu väitteen (b) ”Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ” olevan epätosi. Väite (b) on suoraan lause 28, joten se on tosi. Peräti 12 kokelasta 13 kokelaasta, jotka olivat valinneet väitteen (b) olevan epätotta, olivat valinneet väitteen (a) ”Jos funktio f on jatkuva kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a ” pitävän paikkansa. Luultavasti siis väitteen (b) epätodeksi valinneilla kokelailla oli virhekäsitys funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden välisen yhteyden suhteen.

Kahdeksanneksi yleisin funktion derivoituvuuteen liittyvä virhe oli se, että laskettiin pelkästään paloittain määritellyn funktion osafunktioiden derivaattojen arvot tarkastelukohdassa sen sijaan, että olisi määritetty toispuoleisia erotusosamäärän raja-arvoja tai toispuoleisia derivaattojen raja-arvoja ($n = 12$). Kyseessä lienee ennen kaikkea virhekäsitys, jonka mukaan paloittain määritellyn funktion derivoituvuuden tutkimiseen lausekkeen vaihtumiskohdassa riittää derivaattafunktioiden arvojen laskeminen, eikä derivaattafunktioiden raja-arvoja tarvitsisi laskea. Toki raja-arvojen laskeminen on voinut jäädä myös joltain kokelaalta vahingossa pois.

4.2.3 Erotusosamäärän laskemiseen liittyvät virheet

Seuraavaksi tarkastellaan pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuisa esiintyneitä erotusosamäärän laskemiseen liittyviä virheitä. Taulukossa 9 on tutkimuksen aineistona olleissa kolmessa tehtävässä esiintyneet erotusosamäärän laskemiseen liittyvät virheet ja niiden frekvenssit sekä tehtävittäin eriteltynä että yhteenlaskettuna. Joihinkin virheluokkiin on sisällytetty alempi virheluokka, joka näkyy taulukossa haaleampana ja sisennettynä tekstinä. Alempia virheluokkia on luotu sellaisten virheluokkien alle, jotka eivät toistuneet täysin samanlaisina eri tehtäviä varten luoduissa virheluokitteluissa.

Taulukko 9. Erotusosamäärän laskemiseen liittyvät havaitut virheet pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuisa.

Erotusosamäärä	S20, t. 10	K21, t. 9	K22, t. 8	Yht.
Erotusosamäärän lausekkeeseen sijoitettu väärä arvo tai funktio	-	17	25	42
Laskettaessa arvoa $f(1)$ on sijoitettu luku 1 väärään funktioon	-	-	25	
Ei ole sievennetty erotusosamäärän lauseketta riittävästi	1	3	13	17
Erotusosamäärän määrittämisessä merkittäviä virheitä	0	0	4	4
Erotusosamäärän lausekkeita ei osata muodostaa paloittain määrittelyille funktioille	0	0	2	2

Yleisin erotusosamäärään liittyvä virhe oli se, että erotusosamäärän lausekkeeseen oli sijoitettu väärä arvo tai funktio ($n = 42$). Koska tämä virhe ilmeni niinkin monen kokelaan ratkaisussa, luultavasti kyse ei kaikkien kohdalla ole ollut vain yksittäisestä mokasta, vaan taustalla on virhekäsitys erotusosamäärään sijoitettaviin arvoihin ja funktioihin liittyen.

Toiseksi yleisin erotusosamäärään liittyvä virhe oli se, ettei erotusosamäärän lauseketta sievennetty riittävästi ($n = 17$). Tämä virhe johtuneee ennen kaikkea osaamisen puutteesta, koska monen kokelaan ratkaisu jäi ilmiselvästi kesken erotusosamäärän raja-arvoa laskiessa juuri puutteellisen sievennyksen vuoksi.

4.2.4 Raja-arvoihin liittyvät virheet

Seuraavaksi tarkastellaan pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuisa esiintyneitä funktion raja-arvoihin liittyviä virheitä. Taulukossa 10 on tutkimuksen aineistona olleissa kolmessa tehtävässä esiintyneet funktion raja-arvoihin liittyvät virheet ja niiden frekvenssit sekä tehtävittäin eriteltynä että yhteenlaskettuna. Joihinkin virheluokkiin on sisällytetty alempi virheluokka, joka näkyy taulukossa haaleampana ja sisennettynä tekstinä. Alempia virheluokkia on luotu sellaisten virheluokkien alle, jotka eivät toistuneet täysin samanlaisina eri tehtäviä varten luoduissa virheluokitteluissa.

Taulukko 10. Raja-arvoihin liittyvät havaitut virheet pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuisa.

Raja-arvot	S20, t. 10	K21, t. 9	K22, t. 8	Yht.
Väitetty funktiolla olevan raja-arvo kohdassa, vaikkei sillä oikeasti ole	20	0	0	20
Raja-arvoa laskiessa ei olla sijoitettu x :n paikalle arvoa	0	4	0	4
Laskettu oikeanpuoleinen raja-arvo vasemmanpuoleisena ja toisin päin	0	0	2	2
Ei osata laskea toispuoleisia raja-arvoja	0	0	1	1
Raja-arvot katsottu funktion kuvaajasta	0	0	1	1
Funktiolla on raja-arvo olemassa, jos sen toispuoleisista raja-arvoista tulee kummastakin ääretön	0	0	1	1
Raja-arvoa ei voi laskea, jos erotusosamäärän lausekkeesta tulee vakio	0	0	1	1
Ei osata merkata toispuoleista raja-arvoa oikein (ei merkattu etumerkkiä)	0	0	1	1
Jos erotusosamäärän lausekkeesta $0/x$ lasketaan raja-arvo, kun $x \rightarrow 0$, raja-arvoa ei ole olemassa	0	1	0	1
Vain kyseisessä kohdassa jatkuvilla funktioilla on raja-arvo olemassa kyseisessä kohdassa	1	0	0	1
Jos toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa mutta erisuuret kohdassa, raja-arvo on olemassa	1	0	0	1
Funktiolla ei voi olla raja-arvoa kohdassa, jossa sen kuvaaja muodostaa terävän kulman	1	0	0	1
Ajateltu, että funktion raja-arvo lasketaan erotusosamäärän raja-arvon kaavalla	1	0	0	1

Yleisin ja ainoa yleiseksi virheeksi luokiteltava raja-arvoihin liittyvä virhe oli se, että oli väitetty funktiolla olevan raja-arvo kohdassa, vaikkei sillä oikeasti ole ($n = 20$). Tämä ilmeni

syksyn 2020 tehtävän 10 kohdassa 10.3, jossa annettiin väitteen (d) ”Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ” tai (e) ”Jos funktiolla f on raja-arvo kohdassa a , niin se on derivoituva kohdassa a ” epätodeksi osoittavaksi funktioksi sellainen funktio, jolla ei ole raja-arvoa kohdassa, jossa sillä väitettiin sellainen olevan. Virheen syynä on voinut olla esimerkiksi se, ettei kokelas ole yksinkertaisesti keksinyt funktiota, jolla olisi raja-arvo sellaisessa kohdassa, jossa funktio ei ole jatkuva tai derivoituva. Toinen mahdollinen syy virheelle on voinut olla se, ettei kokelas ole ymmärtänyt täysin väitteen rakennetta eikä ymmärtänyt, millainen funktio osoittaisi väitteen epätodeksi. Kokelas on voinut ajatella, että väitteen osoittaa vääräksi funktio, joka ei ole jatkuva tai derivoituva eikä sillä myöskään ole raja-arvoa kohdassa. Jos kyseessä on ollut jälkimmäinen syy, voidaan puhua matemaattisen väitteen rakenteeseen ja väitteen epätodeksi osoittamiseen liittyvistä virhekäsityksistä. Kokelailla on voinut olla myös virhekäsityksiä raja-arvon määritelmän suhteen. Toisaalta virhe on voinut johtua myös yksinkertaisesti mokasta: kokelas on katsonut, että funktiolla on raja-arvo tarkastelukohdassa, vaikkei sillä todellisuudessa olekaan.

4.2.5 Muut virheet

Seuraavaksi tarkastellaan pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuihin esiintyneitä muita kuin funktion jatkuvuuteen, derivoituvuuteen tai raja-arvoihin liittyviä virheitä. Taulukossa 11 on tutkimuksen aineistona olleissa kolmessa tehtävässä esiintyneet funktion raja-arvoihin liittyvät virheet ja niiden frekvenssit sekä tehtävittäin eriteltynä että yhteenlaskettuna. Joihinkin virheluokkiin on sisällytetty alempi virheluokka, joka näkyy taulukossa haaleampana ja sisennettynä tekstinä. Alempia virheluokkia on luotu sellaisten virheluokkien alle, jotka eivät toistuneet täysin samanlaisina eri tehtäviä varten luoduissa virheluokitteluissa.

Taulukko 11. Muut kuin funktion jatkuvuuteen, derivoituvuuteen tai raja-arvoihin liittyvät havaitut virheet pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuihin.

Muut	S20, t. 10	K21, t. 9	K22, t. 8	Yht.
Tehtävänantoa ei ole noudatettu	59	28	40	127
Annettu esimerkki vain yhteen väitteeseen tai ei kumpaankaan väitteeseen	36	-	-	
Ratkaisussa ei ole osoitettu jatkuvuutta kohdassa $x = 1$	-	-	19	

Muut	S20, t. 10	K21, t. 9	K22, t. 8	Yht.
Kohdassa 10.3 valittu väite, joka on tosi	19	-	-	
Ei ole perusteltu epäderivoituvuutta mitenkään	-	-	15	
Kohtaa 9.2 ei ole yritetty	-	11	-	
Ei ole määritetty parametrille a arvoa eikä tarkasteltu jatkuvuutta eikä derivoituvuutta	-	8	-	
Kohta 9.2 jäänyt kesken	-	5	-	
Kohta 9.1 jäänyt kesken	-	4	-	
On annettu vain funktion kuvaaja mutta ei lauseketta	4	-	0	
Annettua funktiota ei ole määritelty kohdassa $x = 1$	-	-	3	
Annettua funktiota ei ole määritelty kokonaisuudessaan väleillä $]-\infty, 1[$ tai $]1, \infty[$	-	-	3	
Tehtävän 10.1 todistuksen ajateltu osoittavan todeksi sellaisen väitteen, jota se ei oikeasti osoita	66	-	-	66
Väitetty funktioksi suoraa, joka ei ole funktio	10	0	1	11
Ratkaisussa ei mitään oikeaa	5	0	0	5
Väärä lukuarvo laskutoimituksissa	0	4	0	4
Paloittain määritellyn funktion merkinnöissä erikoisuuksia	4	0	0	4
Tarkasteltu jatkuvuutta väärässä kohdassa	-	2	0	2
Merkintävirhe	2	0	0	2
Ei osata derivoida funktioiden osamäärää	1	0	0	1

Yleisin muu kuin funktion jatkuvuuteen, derivoituvuuteen tai raja-arvoihin liittyvä virhe oli se, ettei tehtävänantoa noudatettu ($n = 127$). Esimerkiksi syksyn 2020 tehtävän 10 kohdassa 10.3 annettiin esimerkki vain yhteen väitteeseen tai ei kumpaankaan väitteeseen ($n = 36$), kun olisi pitänyt antaa esimerkkifunktio kahteen eri väitteeseen. Kevään 2021 tehtävässä 9 taas esimerkiksi jätettiin määrittelemättä parametrille a arvo eikä täten myöskään funktion derivoituvuutta ja jatkuvuutta tarkasteltu ($n = 8$), vaikka niin oli tehtävänannossa pyydetty tekemään. Kevään 2022 tehtävässä 8 jätettiin esimerkiksi funktion jatkuvuus kohdassa $x = 1$ osoittamatta ($n = 19$), vaikka niin oli pyydetty tekemään. Tällaiset virheet ovat voineet johtua esimerkiksi tehtävänannon huolimattomasta lukemisesta tai funktion jatkuvuuteen, derivoituvuuteen tai raja-arvoihin liittyvistä virhekäsityksistä.

Toiseksi yleisin muihin virheisiin luokiteltava virhe oli syksyn 2020 tehtävässä 10 tehty virhe, jossa tehtävän 10.1 todistuksen ajateltiin osoittavan todeksi sellaisen väitteen, jota se ei oikeasti osoita ($n = 66$). Todistus osoitti väitteen (b) ”Jos funktio f on derivoituva kohdassa a , niin se on jatkuva kohdassa a ” todeksi, mutta kun peräti 66 kokelasta vastasi väärin, voidaan sanoa kokelailla olevan virhekäsityksiä joko matemaattisen väitteen rakenteeseen ja todistamiseen tai funktion jatkuvuuteen, derivoituvuuteen ja raja-arvoihin liittyen. Pelkästä mokasta on tuskin ainoastaan kyse peräti 66 kokelaan joukossa.

4.2.6 Yhteenveto

Seuraavaksi esitetään vielä yhteenveto syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuihin esiintyneistä yleisimmistä virheistä eli niistä virheistä, joita esiintyi vähintään 12 kertaa tarkastelun kohteena olevien kolmen tehtävän ratkaisuihin ja syistä, jotka ovat voineet johtaa kyseisiin virheisiin. Taulukossa 11 on tehtävien ratkaisuihin havaitut yleisimmät virheet ja ehdotus siitä, ovatko ne nimenomaan virheitä eli yksittäisiä mokia vai virhekäsityksiä.

Taulukko 12. Pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten syksyn 2020 tehtävän 10, kevään 2021 tehtävän 9 ja kevään 2022 tehtävän 8 ratkaisuihin havaitut yleisimmät virheet, niiden frekvenssit ja ehdotus siitä, ovatko ne nimenomaan virheitä eli yksittäisiä mokia vai virhekäsityksiä.

Virhe	Lkm	Virhe vai virhekäsitys
Jatkuvuus		
Ei ole perusteltu jatkuvuutta mahdollisen epäjatkuvuuskohdan ulkopuolella	127	Virhe
Funktio on jatkuva kohdassa, jos sillä on raja-arvo kohdassa	73	Virhekäsitys
Funktio on jatkuva kohdassa, jos ja vain jos se on derivoituva kohdassa	49	Virhekäsitys
Funktio voi olla jatkuva kohdassa, vaikkei sillä olisi raja-arvoa kohdassa	20	Virhe tai virhekäsitys
Väitetty ei-jatkovaa funktiota jatkuvaksi tai jatkuvaa funktiota ei-jatkuvaksi	13	Virhekäsitys
Muut		
Tehtävänantoa ei ole noudatettu	127	Virhe tai virhekäsitys
Tehtävän 10.1 todistuksen ajateltu osoittavan todeksi sellaisen väitteen, jota se ei oikeasti osoita	66	Virhekäsitys
Derivoituvuus		
Ei ole perusteltu derivoituvuutta mahdollisen epäderivoituvuuskohdan ulkopuolella	54	Virhe

Virhe	Lkm	Virhe vai virhekäsitys
Jos funktio on jatkuva kohdassa, se on myös derivoituva kyseisessä kohdassa	42	Virhekäsitys
Funktio on derivoituva, jos sillä on raja-arvo kohdassa	25	Virhe tai virhekäsitys
Funktio voi olla derivoituva myös kohdissa, joissa sillä ei ole raja-arvoa	20	Virhekäsitys
Väitetty derivoituvaa funktiota ei-derivoituvaksi	20	Virhekäsitys
On tiedetty derivoituvuuden määritelmä, mutta ei ole osattu osoittaa epäderivoituvuutta sen avulla	14	Virhekäsitys
Funktio voi olla kohdassa derivoituva, vaikkei se ole jatkuva siinä	13	Virhekäsitys
Laskettu toispuoleisten erotusosamäärän raja-arvojen tai toispuoleisten derivaattojen raja-arvojen sijasta derivaattojen arvot kohdassa	12	Virhekäsitys
Erotusosamäärä		
Erotusosamäärän lausekkeeseen sijoitettu väärä arvo tai funktio	42	Virhekäsitys
Ei ole sievennetty erotusosamäärän lauseketta riittävästi	17	Virhe
Raja-arvot		
Väitetty funktiolla olevan raja-arvo kohdassa, vaikkei sillä oikeasti ole	20	Virhe tai virhekäsitys

5 Luotettavuus

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, millaisia virheitä ja virhekäsityksiä ilmenee ylioppilaskokelaiden pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvien tehtävien ratkaisuisissa. Taustalla oli myös mielenkiinto tutkia sitä, millaisia virhekäsityksiä jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyen on ylipäänsä olemassa. Siihen tarkoitukseen ylioppilaskokelaiden ratkaisujen analysointi soveltui erinomaisesti, koska lukio on ensimmäinen ja monelle myös ainoa paikka, jossa törmätään käsitteisiin jatkuvuus ja derivoituvuus. Täten esimerkiksi peruskoululaisten ymmärrystä näistä käsitteistä ei olisi järkevää mitata. Toisaalta myöskään ihmisten, jotka eivät ole tietoisia jatkuvuuden tai derivoituvuuden määritelmistä tai jotka eivät ole käyttäneet käsitteitä vuosiin, virhekäsityksiä ei olisi järkevää mitata. Yksi vaihtoehto olisi voinut olla tutkia matematiikkaa opiskelevien yliopisto-opiskelijoiden virhekäsityksiä, mutta lukion päättävien oppilaiden keskuudessa on enemmän hajontaa matematiikan taidoissa, ja heitä tutkimalla saadaan todennäköisemmin koko väestöä paremmin kuvaavia tuloksia.

Tutkimuksen alkaessa oletuksena oli, että jatkuvuus ja derivoituvuus ovat melko hankalasti ymmärrettäviä käsitteitä, joihin liittyen myös matematiikan opettajilla saattaa olla virhekäsityksiä. Tutkimuksen edetessä ajatus käsitteiden hankaluudesta vahvistui. Tutkimuksessa ilmeni paljon käsitteisiin liittyviä virheitä ja virhekäsityksiä, joita ei tullut edes etukäteen kuvitelleeksi.

Osa teoreettisessa viitekehyksessä käytetystä kirjallisuudesta oli jo melko iäkästä, mutta niihin viitataan vielä tuoreimmassakin aihepiiriä käsittelevässä kirjallisuudessa, joten niiden käyttö oli perusteltua. Lisäksi vaikka opetus on voinut muutaman kymmenen vuoden aikana kehittyä, on kuitenkin luultavaa, että samoja virhekäsityksiä esiintyy kuitenkin edelleen. Täten myös vanhemman kirjallisuuden käyttö erilaisten funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvien virhekäsitysten kartoittamiseksi voidaan katsoa perustelluksi.

Analysoitava aineisto eli kokelaiden ratkaisut tulivat YTL:ltä satunnaisesti valittuna, mikä vähentää riskiä sille, että aineistossa olisi esimerkiksi erityisen paljon hyvän arvosanan saaneiden kokelaiden ratkaisuja. Aineiston ei siis pitäisi olla mitenkään vinoutunut, vaan täysin satunnaisesti valittu. Luotettavuutta voi kuitenkin heikentää se, että analyysin teki yksittäinen

henkilö, ja vaikka ratkaisut analysoitiinkin kahteen kertaan, virheitä on voinut silti jäädä huomaamatta. Lisäksi koska osa ratkaisuista oli heikosti perusteltuja, osa virheistä on pitkälti yksittäisen tutkijan tulkintaa, mistä tulosten luotettavuus kärsii. Luotettavuutta olisi saatu lisättyä, jos olisi ollut mahdollisuus haastatella kokelaita ja kysyä, mitä he olivat ajatelleet ratkaisua tehdessään. Näin ei kuitenkaan voinut menetellä, koska aineistosta ei voinut jäljittää yksittäisiä henkilöitä.

Tutkimuksen tekeminen kesti noin kahdeksan kuukautta. Tutkimuksen tekemisen välissä oli pari pidempää taukoa, joiden aikana tutkimuksen tekeminen ei edennyt. Tauot toivat etäisyyttä tutkimukseen ja auttoivat hahmottamaan esimerkiksi sitä, miten analyysin ja luokittelun saisi tehtyä hyvin. Koska teoreettinen viitekehys kirjoitettiin ennen analyysin tekemistä, auttoi teoreettisen viitekehysten kirjoittamisen jälkeinen muutaman kuukauden tauko unohtamaan aikaisempien aiheeseen liittyvien tutkimusten tulokset, joten aineiston analyysi päästiin aloittamaan tyhjältä pöydältä, ilman aikaisempien tutkimustulosten vaikutusta.

Aineiston analyysi ja luokittelu tehtiin täysin aineiston pohjalta eli esimerkiksi luokittelua tai mahdollisia virheitä ei mietitty ennen aineiston analyysiä. Tämä esti tutkijan huomion kiinnittymisen pelkästään omia ennakko-oletuksia vahvistaviin virheisiin, mikä lisää tulosten luotettavuutta. Kaikki havaitut jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvät sekä muuhun matematiikkaan liittyvät merkittäviksi koetut virheet esitettiin tuloksissa, samoin useammassa kuin yhdessä ratkaisussa esiintyneet virheet. Tulokset on myös esitetty sekä tehtäväkohtaisesti että yhteenvetona. Tarkemmin keskityttiin niihin virheisiin, joita esiintyi yleisimmin eli vähintään neljässä prosentissa (4 %) vastauksista. Toinen tutkija olisi voinut valita yleiseksi luokiteltavan virheen ehdoksi jonkin muun prosenttiluvun eli tähän tutkimukseen valittu ehto on ainoastaan yksittäisen tutkijan hyväksi kokemana. Lopuksi vielä pohdittiin kolmesta tehtävästä nousseiden yleisimpien virheiden kohdalla sitä, olivatko ne todennäköisemmin yksittäisiä mokia vai virhekesityksistä johtuvia. Tätä pohdintaa pyrittiin tekemään lähinnä yksittäisten ratkaisujen sekä virheiden määrien avulla, eikä liian pitkälle meneviä johtopäätöksiä virheiden syistä voida tehdä tämän tutkimuksen puitteissa.

Tutkimus on eettisesti toteutettu, koska vaikka muiden ihmisten ratkaisuja on analysoitu ilman heidän lupaansa, tutkijalla ei ollut käytettävissä tietoja, joilla olisi voinut yhdistää ratkaisua ratkaisun tehneeseen henkilöön. Lisäksi vaikka joidenkin ratkaisujen osia on esitetty

tämän tutkimusraportin tulososiossa, kyseessä on vain ratkaisujen lyhyitä pätkiä, joista tuskin pystyy tunnistamaan ratkaisun tekijää.

6 Pohdinta

Tässä tutkimuksessa tutkittiin kolmessa vuosina 2020–2022 pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa esiintyneen funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvän tehtävän kokelaiden ratkaisuisissa ilmenneitä virheitä. Ratkaisuisista löydettyjen virheiden avulla pyrittiin vastaamaan tutkimuskysymyksiin 1) ”Minkälaisia virheitä pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa tehdään tehtävissä, joissa käsitellään funktioiden jatkuvuutta ja derivoituvuutta” ja 2) ”Minkälaisia virhekäsityksiä funktioiden jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyen on olemassa kokelaiden pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävien ratkaisujen perusteella”. Tutkimuskysymykseen 1) vastattiin tehtäväkohtaisesti alaluvussa 4.1 ja yhteenvetona alaluvuissa 4.2.1–4.2.5, ja kysymykseen 2) vastattiin alaluvuissa 4.2.1–4.2.6. Lisäksi kysymyksiin 1) ja 2) vastattiin vielä taulukkomuodossa yleisimpien virheiden osalta alaluvussa 4.2.6.

Yleisimmät jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvissä ylioppilaskirjoitusten tehtävissä tehdyt virheet liittyivät jatkuvuuden ja derivoituvuuden määritelmien virheelliseen käyttöön. Yleisin jatkuvuutta koskevat virhe oli se, ettei kokelas perustellut jatkuvuutta mahdolliselta epäjatkuvuuskohdalta vaikuttavan kohdan ulkopuolella, ja toiseksi yleisin se, että funktion ajateltiin olevan automaattisesti jatkuva kohdassa, jossa sillä on raja-arvo. Jälkimmäinen virhe tulkittiin jatkuvuuden määritelmään liittyvästä virhekäsityksestä johtuvaksi. Derivoituvuuteen liittyvistä virheistä yleisin oli se, ettei derivoituvuutta perusteltu muualla kuin mahdolliselta epäderivoituvuuskohdalta vaikuttavassa kohdassa. Toiseksi yleisin derivoituvuuteen liittyvä virhe taas oli se, että funktion jatkuvuudesta ajateltiin seuraavan automaattisesti derivoituvuus, mikä tulkittiin jatkuvuuden ja derivoituvuuden väliseen yhteyteen liittyväksi virhekäsitykseksi. Lisäksi tehtävänantoa noudatettiin puutteellisesti useissa ratkaisuisissa, eli esimerkiksi kevään 2022 tehtävässä 8 jatkuvuutta ei osoitettu kohdassa $x = 1$, vaikka niin olisi tehtävänannon mukaan pitänyt tehdä. Myös erotusosamäärään ja raja-arvoihin liittyen havaittiin useita virheitä, joista yleisimmät olivat erotusosamäärän lausekkeeseen sijoitetut väärät arvot, jotka tulkittiin virhekäsityksistä johtuviksi virheiksi, ja funktion raja-arvon olemassaolon väittäminen kohdassa, jossa funktiolla ei todellisuudessa ole raja-arvoa. Kyseinen virhe tulkittiin joko mokasta ja virhekäsityksestä johtuvaksi.

Jatkuvuuteen liittyvistä virheistä tai virhekäsityksistä ajatus siitä, että jatkuvan funktion on oltava myös derivoituva, on havaittu tämän tutkimuksen lisäksi myös esimerkiksi Tallin ja

Vinnerin (1981) tutkimuksessa. Myös esimerkiksi Tallin ja Vinnerin (1981) havaitsema virheellinen ajattelu, jonka mukaan paloittain määritelty funktio ei voi olla jatkuva, havaittiin myös tässä tutkimuksessa. Lisäksi ajatus siitä, että raja-arvon olemassaolo tarkastelukohdassa on ainoa ehto jatkuvuudelle kyseisessä kohdassa, havaittiin sekä tässä tutkimuksessa että esimerkiksi Viholaisen (2008) tutkimuksessa. Myös ajatus, jonka mukaan funktion jatkuvuudelle tarkastelukohdassa riittää se, että funktio on määritelty kyseisessä kohdassa, esiintyi sekä tässä että esimerkiksi Durun ym. (2010) tutkimuksessa. Sen sijaan jatkuvuuteen liittyvistä virheistä tai virhekesityksistä tässä tutkimuksessa ei havaittu kokelaiden liittävän jatkuvan funktion ominaisuuksiksi sellaisia ominaisuuksia, jotka kuuluvat derivoituville funktioille, kuten Tall ja Vinner (1981) sekä Duru ym. (2010) havaitsivat omissa tutkimuksissaan.

Derivoituvuuteen liittyvistä virheistä ja virhekesityksistä tässä tutkimuksessa havaittiin muun muassa se, että funktion derivoituvuudelle kohdassa riittää, että funktion raja-arvo on kyseisessä kohdassa olemassa. Samainen virhekesitys havaittiin myös Durun ym. (2010) tutkimuksessa. Myös ajatus siitä, että jos derivaatta on 0 tarkastelukohdassa, funktio ei ole derivoituva kyseisessä kohdassa, havaittiin sekä tässä että Durun ym. (2010) tutkimuksessa. Havainto siitä, ettei derivoituvuuden määritelmää osata käyttää oikein, havaittiin Viholaisen (2006) tutkimuksen lisäksi tässä tutkimuksessa muun muassa pelkästään erotusosamäärän eli ei erotusosamäärän raja-arvon tutkimisena. Myös ajatus siitä, että derivoituvuuden voi osoittaa jotenkin muutenkin kuin erotusosamäärää tarkastelemalla havaittiin muun muassa sekä Seldonin ym. (1998) tutkimuksessa että tässä tutkimuksessa. Lisäksi ajatus siitä, että derivoituvuus voidaan osoittaa pelkästään jatkuvuutta tutkimalla, havaittiin sekä tässä tutkimuksessa että muun muassa Meelin (1998) tutkimuksessa. Toisaalta myös ajatus siitä, että derivoituva funktio voi olla epäjatkuva, havaittiin sekä tässä tutkimuksessa että Viholaisen (2006) tutkimuksessa.

Lisäksi Zulun ja Naluben (2020) havaitsema puutteellinen lausekkeiden sieventäminen korostui tässä tutkimuksessa erityisesti erotusosamäärän lausekkeen sieventämisen vaikeutena. Sen sijaan Tarmizin (2010) havaitsemia vaikeuksia hahmottaa funktion merkintöjä ei ilmenyt tässä tutkimuksessa.

Tässä tutkimuksessa havaittiin sellaisia virheitä tai virhekesityksiä, joita ei ainakaan tässä tutkimuksessa käytetyssä kirjallisuudessa ole havaittu. Esimerkiksi jatkuvuuden tai

derivoituvuuden tarkastelu pelkästään epäjatkuvuus- tai epäderivoituvuuskohdalta vaikuttavassa kohdassa, ja perustelujen puuttuminen sille, miksi funktio on jatkuva tai derivoituva muualla, olivat yleisimpiä virheitä tässä tutkimuksessa. Myös jatkuvan funktion väittäminen epäjatkuvaksi tai päinvastoin ja derivoituvan funktion väittäminen epäderivoituvaksi tai päinvastoin olivat melko yleisiä virheitä tämän tutkimuksen perusteella, mutta tässä tutkimuksessa viitatuissa aikaisemmissa tutkimuksissa tällaista virhettä ei havaittu. Myöskään ajatusta siitä, että tarkastelukohdassa derivoituvalla funktiolla ei välttämättä olisi raja-arvoa kohdassa, ei ole havaittu tässä tutkimuksessa viitatuissa tutkimuksissa.

Kun puhutaan virheisiin mahdollisesti johtaneista syistä, jo alaluvussa 4.2 käsiteltiin mahdollisia syitä, mutta siellä tehtävänantojen vaikutusta virheisiin lähinnä sivuttiin. Syksyn 2020 tehtävästä 10 puhuttaessa esiin nousee erityisesti väitteet, joiden jos-niin-rakenteen merkitystä kaikki eivät välttämättä ole ymmärtäneet. Lisäksi erityisesti väitteen (c) ”Funktio f on jatkuva kohdassa a täsmälleen silloin, kun se on derivoituva kohdassa a ” sana ”täsmälleen” on voinut aiheuttaa epäselvyyttä, mistä kertoo se, että lähes puolet sadasta otokseen valitusta kokelaasta oli vastannut virheellisesti väitteen pitävän paikkansa. Lisäksi kevään 2022 tehtävän 8 ilmaisu ”funktion jatkuvuus” on voinut ohjata kokelaita tutkimaan jatkuvuutta pelkästään kohdassa $x = 1$, joka epäderivoituvuuskohtana luonnollisesti täytyy käydä läpi jatkuvuutta tutkiessa, mutta joka on samalla saanut kokelaat jättämään perustelematta funktion jatkuvuutta muualla. Voidaan pohtia, olisiko sanamuoto ”funktion jatkuvuus kaikkialla” tai ”funktion jatkuvuus määrittelyjoukossaan” saanut vähentymään jatkuvuuden puutteellisesta perustelusta johtuneita virheitä. Myös pelkästään erotusosamäärän lausekkeen liittäminen tehtävänantoon vailla mainintaa raja-arvosta saattoi lisätä epäderivoituvuuden tarkasteluun liittyviä virheitä, sillä osa kokelaista saattoi sen vuoksi unohtaa tutkia erotusosamäärän raja-arvoa.

Epäselvien ja mahdollisesti harhaanjohtavien tehtävänantojen lisäksi on hyvä pohtia, miten opetuksen avulla voitaisiin vähentää jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyviä virheitä. Ensinnäkin, koska monet jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyvistä virheistä liittyivät siihen, ettei jatkuvuutta tai derivoituvuutta osoitettu määritelmän kautta, opetuksessa tulisi pyrkiä korostamaan määritelmien tärkeyttä. Jos vain toimii siten, kuin määritelmässä sanotaan, säästyy monilta virheellisiltä ajatuksilta. Toiseksi, kuten Tall ja Vinner (1981) mainitsevat, siitä virhekesityksestä, ettei paloittain määritelty funktio voi olla jatkuva tai että jatkuvan funktion

kuvaajan tulisi olla yhtenäinen ja pehmeästi kulkeva, pääsisi näyttämällä oppilaille tarpeeksi monipuolisia jatkuvien funktioiden kuvaajia esimerkkeinä. Erotusosamäärän raja-arvojen määrittämistä helpottamaan kannattaisi pyrkiä harjoittamaan oppilaiden lausekkeiden sieventämiskykyä. Lausekkeiden sieventämisen osaaminen saattaisi vähentää kynnystä käyttää derivoituvuuden määritelmää derivoituvuuden tarkasteluun, koska kuten Viholainen (2006) havaitsi, monet tutkittavista eivät halunneet tai osanneet laskea erotusosamäärän raja-arvoa.

Opettajien olisi siis syytä olla tietoisia Tallin matematiikan kolmen maailman teoriasta, jonka mukaan oppilaan on ensiksi hahmotettava havainto- ja symbolimaailma ennen siirtymistä formaalimaailmaan (Tall, 2004). Jatkuvuuden ja derivoituvuuden käsitteitä on siis tämän teorian nojalla järkevää havainnollistaa oppilaille esimerkiksi funktioiden kuvaajia näyttämällä, mutta on tärkeää näyttää tarpeeksi monipuolisia esimerkkejä. Tällöin esimerkiksi virhekäsitystä, jonka mukaan paloittain määritelty funktio ei voisi olla jatkuva, voitaisiin ehkäistä näyttämällä jatkuvien paloittain määriteltyjen funktioiden kuvaajia (Tall & Vinner, 1981). On tärkeää pyrkiä luomaan oppilaille formaalin määritelmän kanssa mahdollisimman yhdenmukainen käsitekuva, joka ei yksinkertaistaisi liikaa käsitteen merkitystä oppilaan mielessä.

Tutkimuksen tuloksia voidaan hyödyntää opetuksessa riippumatta siitä, millä kouluasteella tai missä maassa opetus tapahtuu. Tämän voi havaita tässä tutkimuksessa viitattua kirjallisuutta ja tämän tutkimuksen tuloksia vertaamalla, sillä samoja virheitä tehdään niin lukioikäisten kuin yliopisto-opiskelijoidenkin keskuudessa eri maissa. Lisäksi samoja virheitä toistetaan edelleen, vaikka osasta tässä tutkimuksessa viitatuista aiemmista tutkimuksista on tehty vuosikymmeniä sitten.

Jatkotutkimusideana olisi esimerkiksi tutkia, miksi tässä tutkimuksessa havaittuja virheitä tehdään. Tämä edellyttäisi luultavasti sitä, että tutkija haastattelisi ratkaisut tehneitä henkilöitä, jotta hän pääsisi selville virheiden syistä. Pelkkiä ratkaisuja tutkimalla ei voida saada täyttä varmuutta siitä, mitä ratkaisun laatijan mielessä on ollut ratkaisua tehdessään. Tällöin myös virheiden syihin on hankala päästä luotettavasti käsiksi, koska tällöin ollaan pelkästään tutkijan tulkintakyvyn varassa. Pelkkien mahdollisten virheiden tiedostaminenkin toki auttaa opettajia kehittämään opetustaan virhekäsityksiä vähemmän tuottavaksi, mutta olisi vielä hedelmällisempää tietää syyt virheille. Tällöin opetusta päästäisiin vielä tehokkaammin parantamaan.

Lähteet

- Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Harvard University Press.
- Cornu, B. (1991). Limits. Teoksessa D. Tall (Toim.), *Advanced Mathematical Thinking* (ss. 153–166). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10
- Duru, A., Koklu, O., & Jakubowski, E. (2010). Pre-service mathematics teachers' conceptions about the relationship between continuity and differentiability of a function. *Scientific Research and Essays*, 5, 1519–1529.
- Eskola, J. (2001). Laadullisen tutkimuksen juhannustaiat. Laadullisen tutkimuksen analyysi vaihe vaiheelta. Teoksessa J. Aaltola & R. Valli (Toim.), *Ikkunoita tutkimusmetodeihin II. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin* (ss. 133–157). PS-kustannus.
- Eskola, J. (2007). (Teema)haastattelututkimuksen toteuttamisesta. Teoksessa L. Viinamäki & E. Saari (Toim.), *Polkuja soveltavaan yhteiskuntatieteelliseen tutkimukseen* (ss. 32–46). Tammi.
- Eskola, J., & Suoranta, J. (1998). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. Vastapaino. <https://www.ellibrary.com/reader/9789517685047>
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Springer Netherlands. <http://ebookcentral.proquest.com/lib/helsinki-ebooks/detail.action?docID=3035360>
- Haapasalo, L., Hirvi, T., & Huhtamäki, J. (1995). *Miten lukiolaiset hallitsevat raja-arvon käsitteen? Matematiikan Opetuksen Didaktis-Empiirisiä Malleja (MODEM)*. Jyväskylän yliopisto.
- Hammack, R. (2018). *Book of Proof* (3. p.). Richard Hammack. <https://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/>
- Harjulehto, P., Klén, R., & Koskenoja, M. (2023). *Analyysiä reaalityyppillä* (6. p.). Gaudeamus. <https://www.ellibrary.com/book/9789523454231/analyysia-reaalityyppilla>
- Helsingin yliopisto. (2024). *Tutkinnon rakenne*. <https://www.helsinki.fi/fi/koulutusohjelmat/matematiikan-tieteiden-kandiohjelma/opiskelu/tutkinnon-rakenne>

- Hähkiöniemi, M. (2018). Derivaatan ymmärtämiseen tähtäävä oppiminen ja opetus. Teoksessa *Matematiikan opetus ja oppiminen* (1. p., ss. 110–131). Niilo Mäki Instituutti. <https://www.elibrary.com/book/978-951-39-7584-5/matematiikan-opetus-ja-oppiminen>
- Järnström, J., Kiviharju, J., Lehtinen, P., Mäkiö, H., Oinonen, T., & Tuhola-Kujanpää, A. (2023). *Kaari MAA12 Analyysi ja jatkuva jakauma (LOPS 2021)* (1. p.). Edita Publishing Oy. <http://shop.edita.fi/tuote/kaari-maa12-analyysi-ja-jatkuva-jakauma-lops-2021>
- Järnström, J., Kiviharju, J., Lehtinen, P., Mäkiö, H., Oinonen, T., Tuhola-Kujanpää, A., & Lehtola, J. (2022). *Kaari MAA6 Derivaatta (LOPS 2021)* (1. p.). Edita Publishing Oy. <http://shop.edita.fi/tuote/kaari-maa6-derivaatta-lops2021>
- Luneta, K., & Makonye, P. J. (2010). Learner Errors and Misconceptions in Elementary Analysis: A Case Study of a Grade 12 Class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia*, 3(3), 35–46.
- MAOL. (2019). *Pitkän matematiikan tukimateriaalia—Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 pitkän matematiikan moduulien sisältöjen tarkastelua*. Opetushallitus. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lops2019_maa.pdf
- Meel, D. E. (1998). Honors students' calculus understandings: Comparing calculus and Mathematica and traditional calculus students. Teoksessa A. H. Schoenfeld, J. J. Kaput, & E. Dubinsky, *Research in Collegiate Mathematics Education III* (ss. 163–215). American Mathematical Society.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2. p.). Sage Publications, Inc.
- Müller, U., Ten Eycke, K., & Baker, L. (2015). Piaget's theory of intelligence. Teoksessa S. Goldstein, D. Princiotta, & J. A. Naglieri (Toim.), *Handbook of intelligence. Evolutionary theory, historical perspective, and current concepts* (ss. 137–151). Springer.
- Ojose, B. (2015). *Students' Misconceptions in Mathematics: Analysis of Remedies and What Research Says*. <https://www.semanticscholar.org/paper/Students%27-Misconceptions-in-Mathematics%3A-Analysis-Ojose/05cb7cce67916add3688e2f4f20a525e680f365f>
- Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. ePerusteet. <https://eperusteet.opintopolku.fi/#/fi/perusopetus/419550/oppiaineet/466347>

- Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. ePerusteet. <https://eperusteet.opintopolku.fi/#/fi/lukiokoulutus/6828810/oppiaine/6832793>
- Piaget, J. (1972). *The principles of genetic epistemology*. Käänt. Wolfe Mays. Routledge & Kegan.
- Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development*. Käänt. Terrance Brown and Kishore Julian Thampy. The University of Chicago Press.
- Rassias, T. M., & Tóth, L. (Toim.). (2014). *Topics in Mathematical Analysis and Applications* (Vsk. 94). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-06554-0>
- Saarimäki, M. (2007). *Diskreettiä ja äärellistä matematiikkaa*. Jyväskylän yliopiston avoin yliopisto.
- Sarajärvi, A., & Tuomi, J. (2017). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi: Uudistettu laitos*. Tammi.
- Selden, J., Mason, A., & Selden, A. (1998). *Can Average Calculus Students Work Nonroutine Problems?* 8, 45–50.
- Seppälä, H. (2017). Tieteellisen ajattelun kehittyminen. Teoksessa E. Kallio (Toim.), *Ajattelun kehitys aikuisuudessa: Kohti moninäkökulmaisuutta / Eeva Kallio (toim.) ; kirjoittajat: Salla Ahola [ja 16 muuta]*. Suomen kasvatustieteellinen seura.
- Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4.
- Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 41, 481–492.
<https://doi.org/10.1007/s11858-009-0192-6>
- Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge University Press.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
<https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Tarmizi, R. (2010). Visualizing Student's Difficulties in Learning Calculus. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 8, 377–383. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.053>

- Tossavainen, T., & Haukkanen, P. (2012). Matematiikan opiskelijoiden käsittekuvia monotonisuudesta. *Arkhimedes*, 2012, 23–30.
- Viholainen, A. (2006). Why is a discontinuous function differentiable? *30th conference of the international group of the psychology of mathematics education*, 329–336.
- Viholainen, A. (2007). Students' choices between informal and formal reasoning in a task concerning differentiability. *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.
- Viholainen, A. (2008). Incoherence of a concept image and erroneous conclusions in the case of differentiability. *The Mathematics Enthusiast*, 5(2–3), 231–248. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1104>
- Ylioppilastutkintolautakunta. (2020, marraskuuta 12). *Lopulliset hyvän vastauksen piirteet, pitkä matematiikka, syksy 2020*. Yle. <https://drive.google.com/file/d/1sHwDOAy0PQ3kchBxI5TOEJxIEUe-60tP/view>
- Ylioppilastutkintolautakunta. (2021, toukokuuta 18). *Lopulliset hyvän vastauksen piirteet, pitkä matematiikka, kevät 2021*. Yle. https://drive.google.com/file/d/1MKt66pC-90BoGqSJ7UgL2l_jB_QMtSxJ/view
- Ylioppilastutkintolautakunta. (2022, toukokuuta 17). *Lopulliset hyvän vastauksen piirteet, pitkä matematiikka, kevät 2022*. Yle. https://drive.google.com/file/d/1J0caPuJRi-wjkXFXhDXNiD6jGQA_E03vA/view
- Zulu, J., & Nalube, P. (2020). Learners' Problem Solving Processes in Calculus at Grade 12 Level: A Case Study of Selected Secondary Schools in Lusaka District, Zambia. *Journal of Science and Technology (Zambia)*, 5, 77–98.